ゲーム理論

阪本浩章 *

初稿：December 1, 2021　改訂：February 8, 2022

野球やサッカー，バスケットボール，テニスといった人気スポーツに共通するのは「ゲームのルールがよくできている」ということである．これらのスポーツでは，試合を盛り上げるために選手が何かを演じる必要はない．対戦相手に勝利できるよう各プレイヤーが「利己的に」振る舞えば，自然と面白い結果を生み出すようにルールが巧妙に設計されているからである．同じことは，社会や経済のルールについても言える．我慢をさせられたり意に反した行動を強いられたりする社会よりも，人々がルールに則って好き勝手に振る舞えば自然と上手くいくようデザインされた社会の方がよいだろう．我々が既に学んだ競争市場は，そのような社会制度の典型的な例である．企業や消費者がルールに従って「利己的に」行動すれば，必要なものが必要なだけ生み出され，それを必要とする人にきちんと行き渡るという意味で，競争市場はとてもよくできた「ゲーム」と言える．もっとも，我々が日常生活の中でプレイするゲームは，競争市場のように上手くいくものばかりではない．と言うより，上手くいくことの方が稀なのであって，競争市場の一歩外に出れば，放っておくだけでは「面白い結果」にならないゲームがほとんどと言ってよい．

ゲーム理論（game theory）は，人間社会のありとあらゆるシチュエーションを「人々が一定のルールの下で自らの目的を達成しようとするゲーム」と見なし，それを数理的なモデルを用いて分析するものである．価格理論が数学を用いて競争市場の働きを明らかにしたように，ゲーム理論は社会経済の様々な場面を数理モデルで表現することで，我々が直面する問題の構造を解き明かし，どのようにゲームのルールを改善すべきかを教えてくれる．20 世紀半ばに誕生したこの新しい理論により[1]，経済学の分析対象は「市場取引」から「人間行動一般」へと広がることになった．ゲーム理論は，今や経済学のあらゆる分野（もっと言えば経済学を超えた社会科学・自然科学の諸分野）で応用されており，人々の行動（およびその総体としての社会現象）を科学的に研究するための「共通言語」となっている．以下では，ゲーム理論の基本的な考え方を説明しよう．

---

* 神戸大学経済学研究科 (sakamoto@econ.kobe-u.ac.jp)

[1] 学問分野としてのゲーム理論を確立したのは，数学者のジョン・フォン・ノイマン（John von Neumann）と経済学者のオスカー・モルゲンシュテルン（Oskar Morgenstern）で，彼らの初期の研究は 1944 年に出版された *Theory of Games and Economic Behavior* にまとめられている．

1　ゲームの例

例えば，今あなたは就職活動中で，ある優良企業の採用面接に呼ばれたとしよう．企業から送られてきた通知には，面接の日時や場所は書かれているが，服装についての記述がない．職務内容からして外見は重要でないはずだから，面接も普段通りの私服で臨むのが筋だろう．面接のためだけにスーツを買い込むのはどう考えても無駄である．しかし，面接に呼ばれた他の学生がスーツを着てきた場合，私服のあなたは面接官に悪い印象を与えてしまうかもしれない．大事なのは中身なのだろうが，スーツの学生と私服の学生とが並んで座っていれば，面接官の評価が外見に左右されることもあり得る．一方，他の学生と同様にスーツを着ていけば，少なくとも服装で差がつくことはないから，中身を見て判断してもらえるはずである．逆に他の学生が私服で来た場合には，スーツを着たあなたの方に好印象を持ってもらえる可能性すらある．と言っても，そう考えるのはあなただけでなく，他の学生も状況は同じであろう．かくして，何の指定もされていないにも関わらず，学生全員が普段は着もしないスーツ姿で面接会場に向かうことになる．

ゲーム理論の作法を理解するために，上の状況を数理モデルを使って表現してみよう．まず，登場人物のそれぞれが選べる選択肢は何かを考える．あなた（プレイヤー 1 と呼ぼう）の選択肢は「カジュアル」な服装で面接に臨むか，あるいは「フォーマル」な服装で行くかの二択である．前者を「c」，後者を「f」と書こう．このとき，プレイヤー 1 の選択肢の集合は

$$S_1 := \{c, f\}$$

と書ける．また，この S_1 の中からプレイヤー 1 が選ぶ選択肢を s_1 と書く．つまり，「カジュアル」な服装で面接に臨むのであれば $s_1 = c$ であり，そうではなく「フォーマル」な服装を選ぶのであれば $s_1 = f$ である．面接に呼ばれた他の学生についても，同様にして選択肢を考えることができる．話を簡単にするために，あなたと同時に面接を受ける学生は他に一人だけだとしよう．この学生（プレイヤー 2 と呼ぼう）が選ぶことのできる選択肢の集合を S_2 と書くと，あなたと同様に

$$S_2 := \{c, f\}$$

である．また，彼女（あるいは彼）が S_2 の中から選ぶ選択肢を s_2 と書く．つまり，プレイヤー 2 が「カジュアル」な服装で面接に臨むのであれば $s_2 = c$ であり，そうではなく「フォーマル」な服装を選ぶのであれば $s_2 = f$ である．

ゲーム理論におけるプレイヤーの意思決定モデルは，消費者理論や生産者理論のそれと「基本」は変わらない．つまり，「プレイヤーは自分にとって最も好ましい選択肢を選ぶ」と考える．ただ，競争市場とは異なり，各プレイヤーは自分の選

択だけでなく，他人の選択についても選好を持つ[2]．上の例では，自分が面接に何を着ていくかだけでなく，もう一人の学生が何を着てくるかということもあなたにとって重要であろう．つまり，プレイヤー 1 が $s_1 \in S_1$ という選択肢を選び，プレイヤー 2 が $s_2 \in S_2$ という選択肢を選んだ場合，面接会場では $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ という結果が実現し，各プレイヤーが気にしなければならないのはこの (s_1, s_2) である．これは，プレイヤーの選好が自身の選択肢の集合 $S_i = \{c, f\}$ の上に定義されるのではなく，二人の選択肢の組の集合

$$S := S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) \,|\, s_i \in S_i, i = 1, 2\} = \{(c, c), (c, f), (f, c), (f, f)\}$$

の上に定義されることを意味する．より具体的には，S 上に定義されるプレイヤー 1 の選好 $\succsim_1$ は

$$(f, c) \succ_1 (c, c) \succ_1 (f, f) \succ_1 (c, f) \tag{1}$$

のようなものである可能性が高い．まず，「二人ともフォーマル」と「二人ともカジュアル」のどちらがよいかと問われると，外見で差がつかないのであればスーツを購入せずに済む方が好ましいだろうから，

$$(c, c) \succ_1 (f, f) \tag{2}$$

となろう．ただ，相手が「フォーマル」を選ぶのであれば，自分も「フォーマル」を選ぶほうがよいから，

$$(f, f) \succ_1 (c, f) \tag{3}$$

である．また，相手が「カジュアル」を選ぶ場合，自分は「フォーマル」を選ぶほうがよいから，

$$(f, c) \succ_1 (c, c) \tag{4}$$

である．したがって，(2)–(4) を合わせて，上の (1) が導かれる．プレイヤー 2 にとっても状況は同じであるから，彼女（あるいは彼）は

$$(c, f) \succ_2 (c, c) \succ_2 (f, f) \succ_2 (f, c) \tag{5}$$

のような選好 $\succsim_2$ を持つと考えてよいだろう．二人のプレイヤーがそれぞれ (1) と (5) のような選好を持つとき，果たして S の中からいずれの結果が実現すると考えるべきだろうか．

[2] 競争市場で「他人の選択」を気にせずに済んだのは，価格の存在によって各主体の意思決定が分離されていたからである．競争市場における財の価格は，各個人の選択の影響を（少なくとも直接的には）受けない．他の人が何をしようが，あなたが目の前のコーヒーを一杯 3 ドルで購入（販売）できることに変わりはないから，自分がそれをどれだけ購入（販売）するかだけを気にしていれば良いのである．この「他人の選択を気にせずに済む」という特徴があるゆえに，一般的なゲームとは異なり，競争市場という「ゲーム」の結果は効率的になる．

ゲーム理論における最も基本的（かつ最も重要）な解概念は，ナッシュ均衡（Nash equilibrium）と呼ばれるものである[3].

定義 1. プレイヤーの選択肢の組 $(s_1^*, s_2^*) \in S$ が

$$(s_1^*, s_2^*) \succsim_1 (s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 \tag{6}$$

かつ

$$(s_1^*, s_2^*) \succsim_2 (s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{7}$$

を満たすとき，(s_1^*, s_2^*) をナッシュ均衡と呼ぶ.

ナッシュ均衡は，ある種の「自己実現的な予測」であると解釈すると分かり易い．定義にある (6) は，プレイヤー 1 が「プレイヤー 2 は $s_2^* \in S_2$ という選択肢を選ぶだろう」と予測しているとき，プレイヤー 1 にとって $s_1^* \in S_1$ が最も好ましい選択肢であることを要求している．同様に (7) は，プレイヤー 2 が「プレイヤー 1 は $s_1^* \in S_1$ を選ぶだろう」と予測しているとき，プレイヤー 2 にとって $s_2^* \in S_2$ を選ぶことが最も好ましい選択肢であることを求めている．したがって，(6) と (7) が同時に満たされているとき，各プレイヤーが「ゲームの結果は (s_1^*, s_2^*) である」と予測するならば，その「予測の結果として」実際に (s_1^*, s_2^*) が実現するのである．この意味で，ナッシュ均衡の定義はゲームの結果が満たすべき十分条件を与えている（この条件を満たす状態はゲームの結果としてもっともらしい）と言える．

また (6) や (7) は，解がもっともらしいものであるための必要条件でもある（つまり (6) や (7) を満たさない (s_1^*, s_2^*) はゲームの結果としてもっともらしくない）．例えば (6) が満たされておらず，したがってプレイヤー 2 が $s_2^* \in S_2$ を選んでいるときに，プレイヤー 1 にとってより好ましい選択肢 $s_1 \in S_1$ が別に存在した（$s_1 \neq s_1^*$）としよう．そのような状態を均衡（ゲームの結果として生じるであろう事態についての我々の予測）として採用することには，次の点で問題がある．まず，仮にプレイヤー 2 は s_2^* を選ぶのだとしても，プレイヤー 1 にとっては s_1^* を選ぶことが合理的でなくなる．s_1^* よりも好ましい選択肢が別に存在するからである．すると今度は，プレイヤー 2 にとっても s_2^* を選ぶことが合理的でなくなる．プレイヤー 2 が s_2^* を選ぶことの合理性は，プレイヤー 1 が s_1^* を選ぶだろうという予測を前提としていたからである．もはや「プレイヤー 1 が s_1^* を選ぶだろう」という予測に信憑性はないのだから，「プレイヤー 2 が s_2^* を選ぶだろう」という予測にも信憑性はなくなる．プレイヤー 1 にとってもプレイヤー 2 にとっても，「ゲームの結果は (s_1^*, s_2^*) である」と考えることが合理的でなくなり，その帰結として，実際に s_i^* を選択することが合理的でなくなるのである．そのような状態が均衡で実現するだろうと考えることは，明らかに妥当性を欠くものであろう．

[3]ナッシュ均衡という呼称は，この解概念に基づく研究を最初に行ったアメリカの数学者ジョン・ナッシュ（John Nash）に因むものである．

上の具体例で，プレイヤーが (1) や (5) のような選好を持つとき，ゲームのナッシュ均衡を実際に求めてみよう．ナッシュ均衡を求めるには，各プレイヤーが互いに（相手の選択を所与として）最適な選択肢を選び合っている状態を見つける必要がある．そのためには「相手の選択を固定した時に自分にとって最適な選択は何か」ということを，プレイヤーのそれぞれについて考えてみるとよい．例えば，プレイヤー 2 が $s_2 = f$ を選択している時，プレイヤー 1 にとって最適な選択は $s_1 = f$ であるから，プレイヤー 1 の選好は

$$(f, f) \succsim_1 (s_1, f) \quad \forall s_1 \in S_1 \tag{8}$$

を満たす．一方，プレイヤー 2 の選択を $s_2 = c$ で固定すると，プレイヤー 1 にとって最適な選択は $s_1 = f$ であるから，この時プレイヤー 1 の選好は

$$(f, c) \succsim_1 (s_1, c) \quad \forall s_1 \in S_1 \tag{9}$$

を満たす．同様に，プレイヤー 1 が $s_1 = f$ を選択している時，プレイヤー 2 にとって最適な選択は $s_2 = f$ であるから，プレイヤー 2 の選好は

$$(f, f) \succsim_2 (f, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{10}$$

を満たす．一方，プレイヤー 1 の選択を $s_1 = c$ で固定すると，プレイヤー 2 にとって最適な選択は $s_2 = f$ であるから，この時プレイヤー 2 の選好は

$$(c, f) \succsim_2 (c, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{11}$$

を満たす．(8)–(11) を見比べて，全てのプレイヤーについて選好 $\succsim_i$ の左辺に現れる戦略の組が見つかれば，それがナッシュ均衡になる[4]．この例では (8) と (10) の左辺が一致するので，$(s_1^*, s_2^*) = (f, f)$ がナッシュ均衡である．したがって，ナッシュ均衡をゲームの解概念として採用することで，二人の学生はどちらも「フォーマル」を選択するだろうという（もっともらしい）予測が導き出される．

[4] これは，そのような選択肢の組が「最適応答関数の不動点」になるからである．最適応答関数（best response function）とは，相手が選んだ選択肢に対する最適な応答を各プレイヤーについて考えたもので，例えばプレイヤー 1 の最適応答関数は，各 $s_2 \in S_2$ について

$$(b_1(s_2), s_2) \succsim_1 (s_1, s_2) \quad \forall s_1 \in S_1 \tag{12}$$

を満たす関数 $b_1 : S_2 \to S_1$ である．同様に，プレイヤー 2 の最適応答関数は，各 $s_1 \in S_1$ について

$$(s_1, b_2(s_1)) \succsim_2 (s_1, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{13}$$

を満たす関数 $b_2 : S_1 \to S_2$ である．ある $(s_1^*, s_2^*,)$ について (12) と (13) の左辺が一致するということは，

$$(b_1(s_2^*), s_2^*) = (s_1^*, b_2(s_1^*)) \iff (b_1(s_2^*), b_2(s_1^*)) = (s_1^*, s_2^*)$$

すなわち，$(s_1^*, s_2^*,)$ が関数 $(b_1, b_2) : S_1 \times S_2 \to S_1 \times S_2$ の不動点であることを意味する．

注意深い読者は，このゲームの結果（ナッシュ均衡）がパレート効率的ではないということに気が付いたかもしれない．プレイヤーの選好は (1) と (5) で与えられていたから，

$$(c,c) \succ_i (f,f) \quad \forall i \in \{1,2\}$$

つまり，いずれのプレイヤーも (f,f) より (c,c) を好む．したがって，(f,f) から (c,c) への変化はパレート改善であり，それは取りも直さず，ナッシュ均衡がパレート効率的でないことを意味する．結局皆が同じ服装で面接を受けることになる（つまりは外見で判断されることがない）のであれば，スーツよりも私服で済ませられるほうがよい．面接会場に向かう誰もがそのように考えているにも関わらず，各自が自分にとって最も好ましい選択肢を選んだ結果，不幸なことに誰も得をしない状況が実現してしまう．これは，競争市場で各自が好ましいと思う選択肢を選べば自然と「望ましい」状況が実現したことと対照的である．この例が示すように，他人の行動を気にしなければならない状況（そのような状況はしばしば「戦略的状況」と呼ばれる）では，結果は一般に非効率的になる．

この「誰も得をしない」結果を見て，あわよくば他の候補者を出し抜こうと「利己的に」振る舞った学生たちを責めることもできる．しかし，学生たちは与えられたルールの下で自らの目的を達成しようとしただけであり，まずかったのはむしろ「ゲームのルール」の方だと考えるべきである．例えば，企業の側が「面接会場へは普段着でお越しください」などと通知に付記していたならば，学生たちがプレイするゲームのルールは劇的に変化していたと考えられる．服装の指定がある以上，それを無視すれば面接官に与える印象は芳しくないはずである．二人ともが指定を無視した場合には差はつかないだろうが，どちらか一方の学生だけがスーツで面接会場に現れれば，指定通りに普段着で面接に臨んだ学生が相対的に良い印象を与えることになる．例えばあなたが指定された通りに $s_1 = c$ を選んだ場合，仮に相手が指定を無視して $s_2 = f$ を選んでくれれば，あなたが面接を突破する可能性は高まる．逆にあなたが指定を無視して $s_1 = f$ を選んだ場合，相手が指定通りに $s_2 = c$ を選んでしまうと，あなたの手元に届くのはおそらく不採用通知となろう．したがって，この新しいゲームのルールの下で，あなた（プレイヤー 1）の選好は

$$(c,f) \succ_1 (c,c) \succ_1 (f,f) \succ_1 (f,c) \tag{14}$$

のように修正される．同様に，もう一人の学生（プレイヤー 2）の選好は

$$(f,c) \succ_2 (c,c) \succ_2 (f,f) \succ_2 (c,f) \tag{15}$$

と書くことができる．

新しいルールの下で，二人がこのゲームをプレイした場合に何が起こるかを考えよう．ナッシュ均衡を求める手続きについては，既に上で説明した通りである．

まず，プレイヤー 2 が $s_2 = f$ を選択している時，プレイヤー 1 にとって最適な選択は $s_1 = c$ であるから，

$$(c, f) \succsim_1 (s_1, f) \quad \forall s_1 \in S_1 \tag{16}$$

が成り立つ．一方，プレイヤー 2 の選択を $s_2 = c$ で固定すると，プレイヤー 1 にとって最適な選択は $s_1 = c$ であるから，

$$(c, c) \succsim_1 (s_1, c) \quad \forall s_1 \in S_1 \tag{17}$$

が成り立つ．同様に，プレイヤー 1 が $s_1 = f$ を選択している時，プレイヤー 2 にとって最適な選択は $s_2 = c$ であるから，

$$(f, c) \succsim_2 (f, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{18}$$

が成り立つ．一方，プレイヤー 1 の選択を $s_1 = c$ で固定すると，プレイヤー 2 にとって最適な選択は $s_2 = c$ であるから，

$$(c, c) \succsim_2 (c, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{19}$$

が成り立つ．(16)–(19) を見比べて，全てのプレイヤーについて選好 $\succsim_i$ の左辺に現れる戦略の組は (c, c) のみである．よって，二人とも「カジュアル」を選択するという結果が，ゲームのナッシュ均衡である[5]．この結果が，先程とは異なり，パレート効率的な状態であることに注意しよう．ナッシュ均衡に比べて，誰もがより好ましいと感じるような結果は他に存在しない．ほんの少しだけルールを修正することで（学生への通知に些細な一文を付記するだけで），各人がルールに則って好き勝手に振る舞えば自然と「上手くいく」ゲームになったのである．

ここで強調しておきたい点は，上の状況を「ゲームの結果」として（つまり与えられたルールの下ではそのような選択をせざるを得ないのだと）認識していなければ，ルールを工夫して問題を解決しようという発想は出てこないということである．この例では，企業の側が単に「学生が自発的にスーツを着ているのだ」という表面的な理解をしている限り，服装を指定して状況を改善しようという考えには至らないだろう．それどころか，そもそも現状に問題がある（非効率的な状態である）ことにすら気が付けないかもしれない．目の前の状況を「人々が一定のルールの下で各自の目的を達成しようとするゲーム」と認識し，それを数理モデルによって陽表的に表現することで初めて，問題の所在に気付き，いかなるルール（制度）を設計すべきかを考えることが可能になるのである．

[5] この $(s_1^*, s_2^*) = (c, c)$ が，実際に定義 1 の条件を満足することを確認してほしい．

2　ゲームの正規形表現

前節の例をもう少し抽象化して，他の文脈にも応用できるような形でゲーム理論の考え方をまとめておこう．一般に，ゲームは次の三つの要素から構成される．一つ目の構成要素はプレイヤー（player）である．プレイヤーは，個人であることもあれば，企業であることもあり，場合によっては政府や国がプレイヤーになることもある．要は，分析の対象となっている状況における「登場人物」のことをプレイヤーと呼ぶのである．二つ目の構成要素は戦略空間（strategy space）である．戦略空間とは，プレイヤーが選ぶことのできる選択肢（戦略）の集合のことで，各登場人物に何ができるのか（したがって何ができないのか）を明示的に記述するためにある．最後の構成要素はプレイヤーの選好（あるいは選好の関数表現）で，ゲーム理論では慣習的にこれを利得（payoff）と呼ぶ．これら三つの構成要素（プレイヤー，戦略空間，利得）を記述したものを，ゲームの正規形表現（normal-form representation）と呼ぶ[6]．

正規形ゲームは，数学を用いて表現すると次のようになる．まず，プレイヤーの数を $n \in \mathbb{N}$ で表わし，プレイヤーの集合を $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ のように表現する．次に，プレイヤー $i \in N$ の戦略空間（このプレイヤーが選べる選択肢の集合）を S_i と書く．前節の例からも明らかなように，プレイヤーにとっては自分の選択肢のみならず，他のプレイヤーの選択肢も重要になる．したがって，各プレイヤーは戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ を集めた集合

$$S := S_1 \times \cdots \times S_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_i \in S_i, i = 1, 2, \ldots n\}$$

の上に選好を持ち[7]，この S 上に定義されるプレイヤー i の選好を $\succsim_i$ と書く．これら三つの要素（プレイヤー，戦略空間，選好）を合わせた $(N, (S_i)_{i \in N}, (\succsim_i)_{i \in N})$ がゲームの正規形表現である．あるいは，選好 $\succsim_i$ が関数 $u_i : S \to \mathbb{R}$ によって代表される（ゲーム理論ではそのような u_i のことを利得関数と呼ぶ）として，正規形表現を $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ のように書くことも多い．

このように数学を用いて記述することで，ゲームの解（結果として実現するであろう状態についての我々の予測）を次のように定義することができるようになる．

定義 2. 正規形ゲーム $(N, (S_i)_{i \in N}, (\succsim_i)_{i \in N})$ で，戦略の組 $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ が

$$(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \succsim_i (s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*) \quad \forall s_i \in S_i \quad \forall i \in N \tag{20}$$

を満たすとき，$(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ をナッシュ均衡と呼ぶ．

---

[6] ゲームの表現の仕方には，正規形表現の他に，プレイヤーの手番（誰がどのタイミングで行動できるか）を明示的に記述する展開形表現（extensive-form representation）というものもある．

[7] ちなみに，戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n) \in S$ のことを戦略プロファイル（strategy profile）と呼ぶことが多い．

具体例を挙げる．経済学部で開講されているある科目で，教室まで来て対面で受講するか，それとも自宅に居ながら遠隔で受講するかを受講生が選択できるものがあったとしよう．この科目は授業時間の多くをグループワークに使うため，あなたは対面で受講した方がクラスメイトと直に話せるぶん教育効果は高いと感じている．新しい友人を見つける機会にもなるし，休憩時間に情報交換できるというメリットもある．ただ，他の学生の多くが遠隔受講を選択した場合には，あなた（あるいは少数の学生）だけが教室に来てもあまり意味はないため，自分も遠隔で受講した方が大学に来る手間がなくてよい．このような状況で何が起きるかを，正規形ゲームを用いて検討してみよう．

まず，このゲームのプレイヤーは受講生であり，受講生の人数を $n \in \mathbb{N}$ と書くと，プレイヤーの集合は $N := \{1, \ldots, n\}$ である．プレイヤーの選択肢については，対面で受講するという戦略を $s_i = 1$，遠隔で受講するという戦略を $s_i = 0$ と書くと，戦略空間は

$$S_i := \{0, 1\} \quad \forall i \in N$$

のように表現できよう．話を簡単にするために，プレイヤーの選好 $\succsim_i$ は同一で，自分が対面で受講する場合にはなるべく多くの学生が教室で受講する方が好ましく，逆に遠隔で受講する場合には他の学生の選択は気にしない（無差別）とする．また，自分を含めてある一定数（その数を $m \in \mathbb{N}$ と書き，$2 \leq m \leq n$ を満たすものとしよう）の学生が教室に来る時のみ，遠隔よりも対面で受講する方が好ましいと考えているとしよう．対面で受講する学生の数が自分を含めても m 人に満たない時は，自宅で遠隔受講する方が好ましい[8]．以上で，上の状況を正規形ゲーム $(N, (S_i)_{i \in N}, (\succsim_i)_{i \in N})$ で表現することができた．あとは，ゲームの結果（ナッシュ均衡）を特徴づけるために，(20) を満たすような戦略の組 $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ を見つければよい．

この種の問題を手際よく解くには，闇雲に解きはじめるより先に，まずは直観を働かせてみるのがよい．つまり，ゲームの構造を念頭に置いた上で，どのような戦略の組がナッシュ均衡になりそうか，なんとなく当たりを付けてみるのであ

[8] そのような選好は，教室に来る学生の数が $\sum_{i' \in N} s_{i'}$ と書けることに注意すると，例えば

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) := \left(\sum_{i' \in N} s_{i'} - m + \epsilon \right) s_i \quad \forall (s_1, \ldots, s_n) \tag{21}$$

のような利得関数 $u_i : S \to \mathbb{R}$ によって表現できる．ただしここで，ϵ は $0 < \epsilon < 1$ を満たす定数である．この関数 u_i は

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} \sum_{i' \in N} s_{i'} - m + \epsilon & \text{if } s_i = 1 \\ 0 & \text{if } s_i = 0 \end{cases}$$

を満たすから，自分が対面で受講する場合（$s_i = 1$）にはなるべく多くの学生が教室で受講する方が好ましく，逆に遠隔で受講する場合（$s_i = 0$）には他の学生の選択について無差別である．また，m 人以上の学生が教室に来る場合（$\sum_{i' \in N} s_{i'} \geq m$）では $s_i = 1$ を選ぶのがよく，逆に教室に来る学生の数が m 人より少ない場合（$\sum_{i' \in N} s_{i'} \leq m - 1$）では $s_i = 0$ を選ぶのがよい．

る．上の例でプレイヤーの選好を注意深く見ると，「どのプレイヤーも他のプレイヤーと同じ選択肢を選びたい」という構造にあることが分かる．例えば，自分以外のクラスメイトが対面での受講を選択している場合，あなたにとっても対面を選ぶことが好ましい．逆に，自分以外のクラスメイト全員が遠隔受講を選んでいるならば，あなたにとっての好ましい選択肢も遠隔になる．状況は他の受講生も変わらないので，このことから「全てのプレイヤーが同じ選択肢を選んでいる状態」がナッシュ均衡になりそうだと察しが付くはずである．その上で，この直観が正しいかどうかを確かめてみればよい．

まずはプレイヤー 1 の立場になって考えてみる．プレイヤー 1 が「他の受講者は全て対面で受講する」と予測しているとき，自分自身も対面を選択すれば教室に来る学生の数は $n \geq m$ となるから，$s_1 = 1$ のほうが $s_1 = 0$ よりも好ましい．つまり

$$(1,1,\dots,1) \succsim_1 (s_1,1,\dots,1) \quad \forall s_1 \in S_1 := \{0,1\}$$

である．次にプレイヤー 2 の立場になって考えてみる．プレイヤー 2 が「他の受講者は全て対面で受講する」と予測しているとき，自分自身も対面を選択すれば教室に来る学生の数は $n \geq m$ となるから，$s_2 = 1$ のほうが $s_2 = 0$ よりも好ましい．よって

$$(1,1,\dots,1) \succsim_2 (1,s_2,\dots,1) \quad \forall s_2 \in S_2 := \{0,1\}$$

である．同様にして，任意のプレイヤー $i \in N$ について

$$(1,1,\dots,1) \succsim_i (1,\dots,s_i,\dots,1) \quad \forall s_i \in S_i$$

が成り立つことが言える．したがって，定義 2 から，戦略の組 $(1,1,\dots,1) \in S$ はナッシュ均衡である．つまり，各受講生が「みんな対面で受講するだろう」と予測しているとき，実際に「みんなが対面で受講する」状態が実現し，その予測が正しかったことが確認される．

それでは，各受講生が「みんな遠隔で受講するだろう」と予測した場合にはどうだろうか．実はこの場合にも，その予測の帰結として，実際に「みんなが遠隔で受講する」状態が実現する．つまり，$(0,0,\dots,0) \in S$ という戦略の組もまたナッシュ均衡である．まずプレイヤー 1 の立場になって考えてみると，「他の受講者は全て遠隔で受講する」と予測しているとき，自分自身が対面を選択しても教室に来る学生の数は $1 < m$ に留まるから，$s_1 = 0$ のほうが $s_1 = 1$ よりも好ましい．つまり

$$(0,0,\dots,0) \succsim_1 (s_1,0,\dots,0) \quad \forall s_1 \in S_1$$

である．プレイヤー 2 の立場になって考えてみても，「他の受講者は全て遠隔で受講する」と予測しているとき，自分自身が対面を選択したところで教室に来る学

生の数は $1 < m$ であるから，$s_2 = 0$ のほうが $s_2 = 1$ よりも好ましい．よって

$$(0, 0, \ldots, 0) \succsim_2 (0, s_2, \ldots, 0) \quad \forall s_2 \in S_2$$

である．同様にして，任意のプレイヤー $i \in N$ について

$$(0, 0, \ldots, 0) \succsim_i (0, \ldots, s_i, \ldots, 0) \quad \forall s_i \in S_i$$

が成り立つことが言える．したがって，定義 2 から，戦略の組 $(0, 0, \ldots, 0) \in S$ もナッシュ均衡である．全く同じゲームがプレイされたとしても，その結果として $(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (1, 1, \ldots, 1)$ という状態が実現することもあれば, $(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ という別の状態が実現することもある．

あとは，これら以外の戦略の組がナッシュ均衡になり得ないことを示せばよい．証明は，例えば背理法を用いるのであれば，以下のようになろう．背理法の仮定として，「全員対面」でも「全員遠隔」でもない状態がナッシュ均衡であったとする．そのような状態で対面参加を選んでいる学生の数を $k \in \mathbb{N}$ と書こう．ここで，もし $k \geq m$ であるとすると，現状で遠隔を選んでいる学生（仮定によりそのような学生が少なくとも一人は存在する）は，m 人以上の学生が教室に来る（その場合には自分も対面を選ぶほうが好ましい）にも関わらず遠隔を選んでいることになり，これは矛盾である．一方，$k < m$ だとすると，現状で対面を選んでいる学生（仮定によりそのような学生が少なくとも一人は存在する）は，自分を入れても m 人未満の学生しか教室に来ない（その場合には自分は遠隔の方がよい）にも関わらず対面を選んでいることになり，これもまた矛盾である．したがって，「全員対面」でも「全員遠隔」でもない状態がナッシュ均衡になり得ると仮定した場合には必ず矛盾が導かれ，その論理的な帰結として，これら以外にナッシュ均衡は存在しないと結論付けることができる．

この例が示すように，ゲームの「もっともらしい結果（ナッシュ均衡）」は一つに決まるとは限らない．起こり得る結果が複数あり，その中からどの状態が実現してもおかしくない，ということはよくある．いわゆるソーシャルネットワーキングサービス（SNS）などはよい例だろう．類似の機能を持った SNS が複数存在するとき，なるべく多くの人が利用している SNS を自分も使った方が利便性は高まるから[9]．上の例と同じように「他の人と同じ選択肢を選ぶのがよい」という状況が生まれる．したがって，多くの人が「他の人もこの SNS を使うだろう」と予測すれば，その予測の結果として，実際にその SNS を利用することが多くの人にとって最適な選択になる．このロジックはいずれの SNS についても当てはまるから，少なくとも初期時点では，最終的にどの SNS が支配的なシェアを獲得してもおかしくない．つまり，この場合のナッシュ均衡は SNS の数だけ存在する．別

[9] このように，財やサービスを利用する人が増えることによってその財やサービスの価値が変化する現象をネットワーク外部性（network externality）と呼ぶ．

の例として，家庭内での男女の役割分担についても，同様のことが言えるかもしれない．多くの家庭で「女性が家事と育児を担い男性が長時間労働に従事する」という戦略が取られている時，自分たちだけがそうではない選択をすることの費用は大きくなる．社会制度や職場における慣習の多くが「典型的な」男女の役割分担を暗黙裡に仮定して設計されてしまうからである．特定の家庭のあり方が一般化した社会では，そうではない家庭のあり方（家事や育児を担う男性や「働く女性」）を選んだ途端に不利益を被るということが頻繁に生じる．したがって，この場合には「女性が家事と育児を担い男性が長時間労働に従事する」ことが全ての家庭にとって最適な戦略（ナッシュ均衡）になる．しかし，全く同じ論理から，男女の役割を逆にした状態も（そのような家庭のあり方が十分に一般化するならば）ナッシュ均衡になろう．要は「全ての個人が最適な選択肢を互いに選び合っている状態」ならば，その状態はいずれもナッシュ均衡になるのである．あるいは「その状態から自分だけ抜け出ようとすることが誰にとっても割に合わない状態」と言い換えてもよい．

ナッシュ均衡が複数存在するようなゲームでは，前節で議論したような「ルールの改善」とはまた違った意味で，何らかの介入を正当化する余地が生まれる．上で議論した「対面か遠隔か」を選ぶゲームでは，多くの学生にとって「全員が遠隔で受講する」よりは「全員が対面で受講する」方が好ましいかもしれない．そうであるにも関わらず，ただ成り行きに任せて学生たちに選択させるだけでは，何かの拍子に「他の学生は教室に来ない」という予測が支配的となり，前者の状態がナッシュ均衡として実現してしまう可能性がある．このような可能性が予め分かっている場合には，教員の側が学生たちの予測を適切に制御すべきであろう．例えば「例年ほとんどの学生が教室で受講しています」などと事前情報を伝えておけば，学生たちは「他の学生も教室に来るだろう」という予測（そしてその予測は実際に「正しい」ことになる）を抱くことができるようになる．そうすることで，ゲームのルール自体に変更を加えなくとも，相対的に望ましい均衡へとゲームの結果を誘導（パレート改善）することができる．

3　利得行列

プレイヤーが二人だけで，戦略の数が有限である場合には，正規形ゲームは利得行列（payoff matrix）と呼ばれる図にして表わすことができる．このことを説明するために，1 節で扱った具体例を再び考えよう．このゲームのプレイヤーはあなた（プレイヤー 1）と別の学生（プレイヤー 2）で（$N := \{1, 2\}$），面接会場に「カジュアル」な服装で向かうか（$s_i = c$），あるいは「フォーマル」な服装で面接に臨むか（$s_i = f$）を選ぶのであった（$S_i := \{c, f\}$）．二人の戦略の組 $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ を集めた集合は $S := S_1 \times S_2 = \{(c, c), (c, f), (f, c), (f, f)\}$ で，この S 上にプレイヤー 1 は (1) のような選好 $\succsim_1$ を持ち，一方のプレイヤー 2 は (5) のような選好

$\succsim_2$ を持つ．この正規形ゲーム $(N, (S_i)_{i\in N}, (\succsim_i)_{i\in N})$ を利得行列にしてみよう．

まず，各プレイヤーの選好を，それを代表するような関数（利得関数）で表現する．例えば，関数 $u_1 : S \to \mathbb{R}$ を

$$u_1(s) := \begin{cases} 2 & s = (f, c) \\ 1 & s = (c, c) \\ 0 & s = (f, f) \\ -1 & s = (c, f) \end{cases} \tag{22}$$

で定義すれば，明らかに

$$u_1(f, c) > u_1(c, c) > u_1(f, f) > u_1(c, f)$$

を満たすから，この $u_1(s)$ はプレイヤー 1 の選好 (1) を代表する．同様に，関数 $u_2 : S \to \mathbb{R}$ を

$$u_2(s) := \begin{cases} 2 & s = (c, f) \\ 1 & s = (c, c) \\ 0 & s = (f, f) \\ -1 & s = (f, c) \end{cases} \tag{23}$$

で定義すれば，明らかに

$$u_2(c, f) > u_2(c, c) > u_2(f, f) > u_2(f, c)$$

を満たすから，この $u_2(s)$ はプレイヤー 2 の選好 (5) を代表する．もちろん，各プレイヤーの選好を代表する利得関数は一意に決まらないから，例えば，

$$\tilde{u}_1(s) := \begin{cases} 3000 & s = (f, c) \\ 2900 & s = (c, c) \\ 50 & s = (f, f) \\ 30 & s = (c, f) \end{cases} \tag{24}$$

のように定義される関数 $\tilde{u}_1 : S \to \mathbb{R}$ もプレイヤー 1 の選好 (1) を代表する．ゲームを利得行列で表現するにあたって，利得関数は（各プレイヤーの選好を正確に代表するものである限り）どのように選んでも構わない．

選好を利得関数で表現できたら，一方のプレイヤーの戦略を横（行）に，他方のプレイヤーの戦略を縦（列）に書き並べ，各プレイヤーの戦略が交わる点にその戦略の組に対応する利得を書き込む．すると，図 1 のような「行列」ができあが

		player 2	
		c	f
player 1	c	$u_1(c,c)$, $u_2(c,c)$	$u_1(c,f)$, $u_2(c,f)$
	f	$u_1(f,c)$, $u_2(f,c)$	$u_1(f,f)$, $u_2(f,f)$

図 1: 面接ゲームの利得行列

		player 2	
		c	f
player 1	c	1 , 1	-1 , 2
	f	2 , -1	0 , 0

図 2: 面接ゲームの利得行列の具体例

		player 2	
		c	f
player 1	c	2900 , 1	30 , 2
	f	3000 , -1	50 , 0

図 3: 別の利得関数を用いた場合の利得行列

る．この行列は利得行列と呼ばれ，正規形ゲームを図にして表現することによって，ゲームの構造を視覚的に理解したり，ナッシュ均衡を見つけやすくしたりするものである．例えば利得関数 (22)–(23) を用いると，図 2 のように，利得行列に具体的な利得の値を書き加えることができる．(1) や (5) のように利得がランキングの形で与えられている場合に比べて，こちらの方がゲームの構造を把握しやすいと感じる人も多いだろう．もちろん，ゲームの構造は利得関数の選び方に依存しないから，例えば (24) のような別の利得関数を用いても問題ない（図 3）．

正規形ゲームを利得行列で表現してしまえば，あとはおよそ機械的にナッシュ均衡を求めることができる．まず，プレイヤー 1 にとって最適な戦略は何かを知るために，利得行列の「列」に着目する（これはプレイヤー 2 の戦略を固定する作業に相当する）．プレイヤー 1 の利得を各「列」の中で比較し，利得が列の中で最も大きくなるような戦略を見つけるのである．例えば，図 4 の左側の赤い列（プレイヤー 2 の戦略を $s_2 = c$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 1 が $s_1 = c$ を選んだ場合の利得は 1 であるが，$s_1 = f$ を選べば利得が 2 になることが分かる．

		player 2	
		c	f
player 1	c	$\mathbf{1}$, 1	$\mathbf{-1}$, 2
	f	$\underline{\mathbf{2}}$, -1	$\underline{\mathbf{0}}$, 0

図 4: プレイヤー 1 にとって最適な戦略

		player 2	
		c	f
player 1	c	1 , $\mathbf{1}$	-1 , $\underline{\mathbf{2}}$
	f	2 , $\mathbf{-1}$	0 , $\underline{\mathbf{0}}$

図 5: プレイヤー 2 にとって最適な戦略

		player 2	
		c	f
player 1	c	1 , 1	-1 , $\underline{2}$
	f	$\underline{2}$, -1	$\underline{0}$, $\underline{0}$

図 6: 相互に最適な戦略を選んでいる状態（ナッシュ均衡）

したがって，この列での最適な選択肢は $s_1 = f$ である（図 4 では対応する利得に下線を付した）．同様にして，図 4 の右側の青い列（今度はプレイヤー 2 の戦略を $s_2 = f$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 1 が $s_1 = c$ を選んだ場合の利得は -1 であるが，$s_1 = f$ を選べば利得が 0 になることが分かる．したがって，この列での最適な選択肢も $s_1 = f$ である．

一方，プレイヤー 2 にとって最適な戦略は何かを知るためには，利得行列の「行」に着目する（これはプレイヤー 1 の戦略を固定する作業に相当する）．プレイヤー 2 の利得を各「行」の中で比較し，利得が行の中で最も大きくなるような戦略を見つけるのである．例えば，図 5 の上側の赤い行（プレイヤー 1 の戦略を $s_1 = c$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 2 が $s_2 = c$ を選んだ場合の利得は 1 であるが，$s_2 = f$ を選べば利得が 2 になることが分かる．したがって，この行での最適な選択肢は $s_2 = f$ である．同様にして，図 5 の下側の青い行（今度はプレイヤー 1 の戦略を $s_1 = f$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 2 が $s_2 = c$ を選んだ場合の利得は -1 であるが，$s_2 = f$ を選べば利得が 0 になることが分かる．したがって，この行での最適な選択肢も $s_2 = f$ である．

最後に，プレイヤーが互いに最適な戦略を選び合っているセルを見付ければ，そのセルに対応する戦略の組がナッシュ均衡である．図 6 に示したように，この例では二人の利得に下線が引かれているのは右下のセルのみであるから，このセルに対応する戦略の組 $(s_1, s_2) = (f, f)$ がナッシュ均衡だと分かる．この結果は，1 節で（利得行列に変換せずに）求めたものと確かに一致する．

利得行列を用いた解法に慣れるために，2 節で扱った具体例（$n = 2$ かつ $m = 2$ とした場合）についても，同様にして均衡を求めてみよう．このゲームでは，各プレイヤーが対面で受講する（$s_i = 1$）か遠隔で受講する（$s_i = 0$）かを選ぶのであった（$S_i := \{0, 1\}$）．二人の戦略の組 $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ を集めた集合は $S := S_1 \times S_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ で，この S 上にプレイヤー 1 は

$$(1, 1) \succ_1 (0, 1) \sim_1 (0, 0) \succ_1 (1, 0) \tag{25}$$

のような選好 $\succsim_1$ を持ち，プレイヤー 2 は

$$(1, 1) \succ_2 (1, 0) \sim_2 (0, 0) \succ_2 (0, 1) \tag{26}$$

のような選好 $\succsim_2$ を持つ．まず，関数 $u_1 : S \to \mathbb{R}$ を

$$u_1(s) := \begin{cases} 1 & s = (1, 1) \\ 0 & s = (0, 1) \\ 0 & s = (0, 0) \\ -1 & s = (1, 0) \end{cases} \tag{27}$$

で定義すれば，明らかに

$$u_1(1, 1) > u_1(0, 1) = u_1(0, 0) > u_1(1, 0)$$

を満たすから，この $u_1(s)$ はプレイヤー 1 の選好 (25) を代表する．同様に，関数 $u_2 : S \to \mathbb{R}$ を

$$u_2(s) := \begin{cases} 1 & s = (1, 1) \\ 0 & s = (1, 0) \\ 0 & s = (0, 0) \\ -1 & s = (0, 1) \end{cases} \tag{28}$$

で定義すれば，明らかに

$$u_2(1, 1) > u_2(1, 0) = u_2(0, 0) > u_2(0, 1)$$

		player 2	
		0	1
player 1	0	$\underline{\mathbf{0}}$, 0	$\mathbf{0}$, -1
	1	$\mathbf{-1}$, 0	$\underline{\mathbf{1}}$, 1

図 7: プレイヤー 1 にとって最適な戦略

		player 2	
		0	1
player 1	0	0 , $\underline{\mathbf{0}}$	0 , $\mathbf{-1}$
	1	-1 , $\mathbf{0}$	1 , $\underline{\mathbf{1}}$

図 8: プレイヤー 2 にとって最適な戦略

		player 2	
		0	1
player 1	0	$\underline{0}$, $\underline{0}$	0 , -1
	1	-1 , 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

図 9: 相互に最適な戦略を選んでいる状態（ナッシュ均衡）

を満たすから，この $u_2(s)$ はプレイヤー 2 の選好 (26) を代表する．これらの利得関数を用いた場合の利得行列を図 7–9 に示した．

まず，プレイヤー 1 にとって最適な戦略は何かを知るために，利得行列の「列」に着目する．図 7 の左側の赤い列（プレイヤー 2 の戦略を $s_2 = 0$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 1 が $s_1 = 0$ を選んだ場合の利得は 0 であるが，$s_1 = 1$ を選べば利得が -1 になることが分かる．したがって，この列での最適な選択肢は $s_1 = 0$ である．同様にして，図 7 の右側の青い列（今度はプレイヤー 2 の戦略を $s_2 = 1$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 1 が $s_1 = 0$ を選んだ場合の利得は 0 であるが，$s_1 = 1$ を選べば利得が 1 になることが分かる．したがって，この列での最適な選択肢は $s_1 = 1$ である．一方，プレイヤー 2 にとって最適な戦略は何かを知るために，利得行列の「行」に着目する．図 8 の上側の赤い行（プレイヤー 1 の戦略を $s_1 = 0$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 2 が $s_2 = 0$ を選んだ場合の利得は 0 であるが，$s_2 = 1$ を選べば利得が -1 になることが分かる．したがって，この行での最適な選択肢は $s_2 = 0$ である．同様にして，図 8 の下側の青い行（今度はプレイヤー 1 の戦略を $s_1 = 1$ で固定した場合）を見ると，プレイヤー 2

が $s_2 = 0$ を選んだ場合の利得は -1 であるが，$s_2 = 1$ を選べば利得が 1 になることが分かる．したがって，この行での最適な選択肢は $s_2 = 1$ である．図 9 に示したように，二人の利得に下線が引かれているのは左上のセルと右下のセルである．よって，これらのセルに対応する戦略の組 $(s_1, s_2) = (0, 0)$ と $(s_1, s_2) = (1, 1)$ が，いずれもナッシュ均衡だと分かる．この結果は，2 節で（利得行列に変換せずに）求めたナッシュ均衡に一致する．