数学補論

阪本浩章 [*]

初稿：July 3, 2015　改訂：November 23, 2021

Contents

[*]神戸大学経済学研究科 (sakamoto@econ.kobe-u.ac.jp)

このノートで学ぶこと

- 1 変数関数
  - 微分係数の意味： 関数のグラフの接線の傾き
  - 線形近似： x が $\bar{x}$ に十分近いとき $f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$
  - よく使う微分の公式：
  $$(a)' = 0, \quad (x^a)' = ax^{a-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln(x))' = 1/x$$
  - 和の公式： $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
  - 積の公式： $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - 連鎖律： $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
- 2 変数関数
  - 偏微分係数の意味： 関数の「切り口」のグラフの接線の傾き
  - 偏微分係数の計算： 他の変数を定数と見なして微分係数を求める
  - 線形近似： (x_1, x_2) が $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ に十分近いとき
  $$f(x_1, x_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2)$$
  - 等高線： 点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における等高線の傾きは $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
  - 連鎖律： $(f(g(x), h(x)))' = f_1(g(x), h(x))g'(x) + f_2(g(x), h(x))h'(x)$
- 最適化問題
  - 1 変数関数の最適化： 方程式 $f'(x^*) = 0$ を x^* について解く
  - 2 変数関数の最適化： 次の連立方程式を (x_1^*, x_2^*) について解く
  $$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0, \quad f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$
  - 2 変数関数の線形制約（$a_1x_1 + a_2x_2 = b$）付き最適化： 連立方程式
  $$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{a_1}{a_2}, \quad a_1x_1^* + a_2x_2^* = b$$
  を (x_1^*, x_2^*) について解く
- 積分
  - 定積分： $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$
  - 積分区間の微分： $\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = -f(a)$， $\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = f(b)$

若干の動機付け

一見すると強面のクラスメイトが，話をしてみると割と良い人だった，ということはよくある．普段は朴訥として多くを語らないが，一度仲良くなってしまえば，ときおり何の装飾もなく発される彼の言葉が意外に思慮深いものであることに気付く．そのような友人に限って，長年の交友が続いたりするものだ．不要な言葉は交わさず，一緒にいてこんなに心持ちのよい人もそうはいない．数学とは，言ってみれば，そんな友人のようなものである．不幸にして，数学を友人に選ぶ人は少ない．しかし幸いにして，数学は友人を選ばない．

一般的な傾向として，数学を不得手とする学生は多いようだ．その理由は，数学で用いられる作法が，控えめに言ってもとっつきにくいものだからだろう．そのことは否定しない．たしかに「彼」は一見すると「強面」である．しかしながら，決められた作法をいったん身に付けてしまえば（そしてそれは見かけよりも難しくない），数学を使って話をすることがいかに効率的であるかに気が付くはずである．日常生活の中で用いる自然言語と比べて，数学は，少ないエネルギーではるかに多くのことを伝えることができる．また，自然言語で誤解なく主張を伝えることは容易でないが，数学を適切に用いれば，多くの場合，誤解を招くことの方が難しい[1]．経済学が論理を記述する手段として数学を援用したことは，それが科学としての発展を指向したことのごく自然な帰結と言えるだろう．

もっとも，これは数学による論理の記述が，社会経済を分析するための唯一最善の方法であることを意味しない．我々にとって関心のある社会現象の中には，数学によっては表現が難しくとも，自然言語では適切に表現され得るものが数限りなくある．経済学は数学によって発展を遂げた一方で，その弊害として，数学による表現が適さない社会現象に見て見ぬふりをしたり，あるいは無理やり数学で表現できるよう現実を曲解したりする傾向も無いではない．数学は非常に便利な手段であるが，いやむしろそうであるからこそ，手段を尊重する余り目的を改変するという倒錯が起こり得る．しかし数学の利用と誤用とを見分けることもまた，数学の適切な理解によって初めて可能となるのである．

この補論は，学部 1 年生向けの講義で用いる数学に限って，必要最低限の知識を効率よく修得してもらうことを目的としたものである[2]．内容の多くは高校で学習した数学の範囲を大きく超えるものではなく，新しい概念も既知の内容の自然な拡張として導入される．抽象的な概念に関しては，幾何的な（つまりは図による）解釈を随所で加え，初学者が具体的なイメージを持って理解し易いよう配慮した．

[1] ただし，不必要なまでに複雑な数学を用いることは，かえって誤解を招く危険性がある．何が「不必要」であるかは扱う対象によるが，同じ主張を伝えるのであれば，可能な限りシンプルな表現を選ぶべきである．

[2] より進んだトピックや数学の厳密な知識を修得するには，経済数学等の受講を勧める．

1　集合と関数

まずは，基本的な表記（notation）に慣れることから始めよう．

1.1　集合

数学では集合（set）という考え方を頻繁に用いる．例えば，整数（integers）の -2 から 2 までを含む集合を

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\} \tag{1.1}$$

のように表記する．集合の要素（element）が数字であるとは限らない．例えば，

$$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \tag{1.2}$$

は 4 つの 2 次元ベクトルを要素に持つ集合である．また「集合 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ をこれ以降 X と呼ぶ」という意味で，

$$X := \{-2, -1, 0, 1, 2\} \tag{1.3}$$

のように表記する．ここで「:=」という記号は「左辺を右辺で定義する」という意味である．同様に「右辺を左辺で定義する」という意味で「=:」という記号を用いる．

さらに「ある要素 x が集合 X に含まれている」という意味で，

$$x \in X \tag{1.4}$$

のように表記する．逆に「ある要素 x が集合 X に含まれていない」という意味で，

$$x \notin X \tag{1.5}$$

のように表記する．例えば $X := \{2, 4, 6, 8\}$ とした場合，$4 \in X$ であり，また $5 \notin X$ である．別の例として，$X := \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ とした場合，$(0,1) \in X$ であり，また $(2,1) \notin X$ である．

ある集合 X に含まれる要素の中で，特定の条件を満たす要素だけを集めたものを

$$\{x \in X \mid x \text{ が満たすべき条件 }\} \tag{1.6}$$

のように表記する．例えば $X := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ とした場合

$$\{x \in X \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2\} \tag{1.7}$$

である[3]．別の例として，$X := \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ とした場合，

$$\{(x_1,x_2) \in X \,|\, x_1 + x_2 = 1\} = \{(0,1),(1,0)\} \tag{1.8}$$

である．ある集合 S に含まれるいずれの要素も別の集合 X に含まれている場合，S は X の部分集合（subset）であると言い，

$$S \subset X \tag{1.9}$$

のように表記する．例えば

$$S := \{2,3\}, \quad X := \{1,2,3,4,5\} \tag{1.10}$$

とした場合，$S \subset X$ である．

よく使う集合については，あらかじめ専用の記号を定義しておく．具体的には，自然数（natural numbers）全体の集合は

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\} \tag{1.11}$$

のように表記する．同様に，整数全体の集合は

$$\mathbb{Z} := \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} \tag{1.12}$$

のように表記する．また，実数（real numbers）全体の集合は $\mathbb{R}$ と表記する．さらに，非負の実数（non-negative real numbers）全体の集合は

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}, \tag{1.13}$$

正の実数（positive real numbers）全体の集合は

$$\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\} \tag{1.14}$$

のように表記する．2 次元の実数ベクトルの集合は，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，あるいはより簡便に $\mathbb{R}^2$ と表記する．非負の 2 次元の実数ベクトルの集合は

$$\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0 \text{ and } x_2 \geq 0\} \tag{1.15}$$

と表記する．

[3]ちなみに，「$\geq$」という記号は「左辺の値が右辺の値と等しいか，あるいはそれ以上である」ことを示すために用いられる．「≧」と同じ意味である．

1.2 関数

ある集合に含まれるそれぞれの要素に，別の集合（同じ集合でもよい）に含まれる特定の要素を関連付けるもののことを関数（function）と呼ぶ．例えば

$$f(x_1, x_2) := x_1 - x_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.16}$$

は，集合 $\mathbb{R}^2$ に含まれる各要素（例えば $(x_1, x_2) = (3, 1) \in \mathbb{R}^2$）に対して，別の集合 $\mathbb{R}$ に含まれる特定の要素（例えば $2 \in \mathbb{R}$）を関連付ける関数である[4]．同様に，

$$f(x) := 2x + 1/x \quad \forall x \in \mathbb{R}_{++} \tag{1.17}$$

は，集合 $\mathbb{R}_{++}$ に含まれる要素 x のそれぞれに対して，同じ集合 $\mathbb{R}_{++}$ に含まれる特定の要素 $2x + 1/x \in \mathbb{R}_{++}$ を関連付ける関数である．

一般に，ある関数 f の定義域（domain）が集合 X で，値域（range）が集合 Y であるとき，

$$f : X \to Y \tag{1.18}$$

のように書く．定義域とはその関数が定義されている範囲のことであり，値域とはその関数が値をとり得る範囲のことである．例えば (1.16) で定義される関数 f については，定義域が $\mathbb{R}^2$ で値域が $\mathbb{R}$ であるから $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と表記される．一方 (1.17) で定義される関数 f であれば $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ と表記される．

また，ある関数 $f : X \to Y$ と別の関数 $g : Y \to X$ について

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in X \tag{1.19}$$

が成り立つ時，g は f の逆関数（inverse function）であると言う[5]．例えば

$$f(x) := 3 + 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

で定義される関数 f の逆関数は

$$g(y) := \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

で定義される関数 g である．というのも

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(3 + 2x) - \frac{3}{2} = x \tag{1.22}$$

という関係が，任意の x で成立するからである．

---

[4] ここで，「$\forall$」は「それぞれの」もしくは「すべての」を意味する記号である．

[5] なお，関数 f の逆関数は f^{-1} のように書くことが多い．

逆関数を求める手続きとしては，$f(x) = y$ と置いて，この方程式を x について解けばよい．方程式 $f(x) = y$ を「x について解く（solve for x）」とは，それを $x = g(y)$ の形に変形するという意味である．例えば，上の例に即して言えば，

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 3 + 2x = y \\ &\iff 2x = y - 3 \\ &\iff x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} =: g(y) \end{aligned} \tag{1.23}$$

のように変形することを言う[6]．幾何的には，もとの関数を 2 次元平面上の 45 度線を境界にして折り返したものが，逆関数である．

1.3 冪関数，指数関数，対数関数

実数 $a \in \mathbb{R}$ について，

$$f(x) := x^a \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{1.24}$$

のような形で定義される関数を，冪（べき）関数（power function）と呼ぶ．ここで，x^a は「x の a 乗」である．例えば，x^2，$x^{1/2}$，$x^{\sqrt{3}}$ などが冪関数にあたる．一方，$b \in \mathbb{R}_+$ を非負の実数として，

$$f(x) := b^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.25}$$

のような形で定義される関数を，指数関数（exponential function）と呼ぶ．ここで，b^x は「b の x 乗」である．特に，b がある特殊な値 $b \approx 2.71828$ に設定された場合の指数関数を，

$$e^x \tag{1.26}$$

と表記する[7]．つまり，e^x は「およそ 2.71828 の x 乗」のことである．この特殊な指数関数 e^x の逆関数のことを自然対数関数（natural logarithmic function）と言い，

$$\ln(x) \quad \text{あるいは} \quad \log_e(x) \quad \text{あるいは} \quad \log(x) \tag{1.27}$$

と表記する（図 1）．自然対数関数は，任意の正の実数 $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ について

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \tag{1.28}$$

[6]「$\iff$」という記号は，この記号の左側と右側とが等しい（つまりは，双方向に書き換え可能である）ことを意味する．

[7]数学には，それが極めて重要な役割を果すことから，特別な名前を与えられた定数がいくつか存在する．円周率 $\pi \approx 3.14159$ はその典型的な例である．ここで登場する $e \approx 2.71828$ も重要な役割を果たす定数の一つであり，オイラー数（Euler's number）やネイピア定数（Napier's constant）などと呼ばれる．ちなみに，記号「$\approx$」は近似を意味し，「≒」と同じものである．

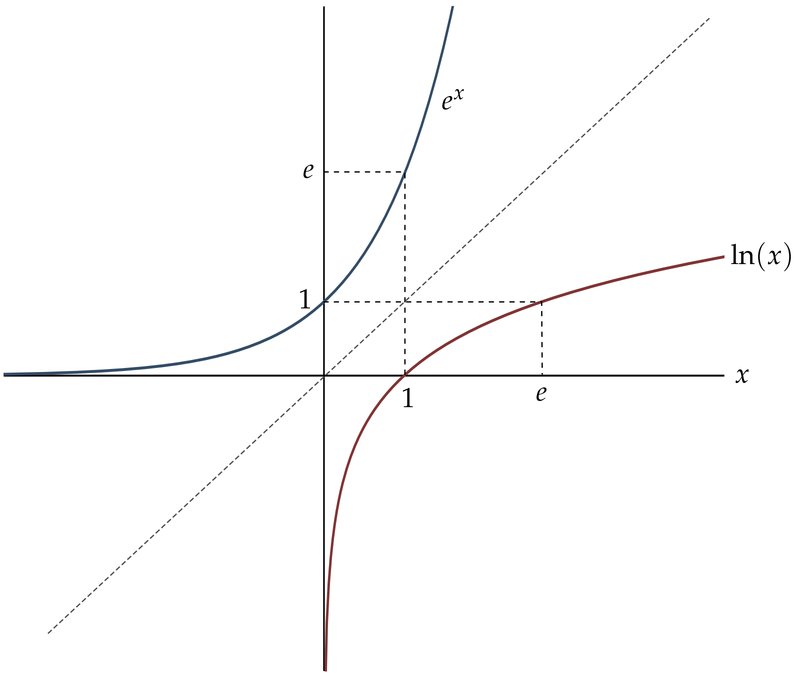

図 1: 指数関数 e^x と対数関数 $\ln(x)$

が成り立つという便利な性質を持っている．さらに，任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}_{++}$ について

$$\ln(x^a) = a \ln(x) \tag{1.29}$$

も成り立つ[8]．

2　微分

X を $\mathbb{R}$ の部分集合として，関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を考える．ある特定の点 $x \in X$ における関数 f の傾き（slope）のことを，f の x における微分係数（derivative）といい，

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{あるいは} \quad \frac{d}{dx}f(x) \quad \text{あるいは} \quad f'(x) \tag{2.1}$$

と表記する．微分係数は関数のグラフの傾きであるから，要は「x が変化したときに関数の値がどれだけ勢いよく変わるか」を捉えたものである．微分係数 $f'(x)$ が大きければ，x を少し変化させただけでも $f(x)$ の値が敏感に反応することを意味する．以下ではこの点をもう少しフォーマルに説明しよう．

[8] 経済学を学ぶにあたって，e^x や $\ln(x)$ の厳密な定義を知る必要はない．図 1 に描かれたグラフの形と，計算上いくつかの便利な性質を持った関数である，ということを理解しておけばよい．

2.1 微分係数の意味

関数 $f(x)$ の値は，当然ながら，$x \in X$ の値に応じて変化する．例えば，ある点 $\bar{x} \in X$ における f の値は $f(\bar{x})$ であるが，別の点 $\bar{x}+1 \in X$ における f の値は $f(\bar{x}+1)$ となり，一般に $f(\bar{x}) \neq f(\bar{x}+1)$ である．したがって，「x の値を $\bar{x}$ から $\bar{x}+1$ に変化させた時の f の変化分」を考えることができ，それは

$$f(\bar{x}+1) - f(\bar{x}) \tag{2.2}$$

のように書ける．より一般に，任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ について[9]，x の値を $\bar{x}$ から $\bar{x}+\varepsilon$ に変化させた時の f の変化分は

$$f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x}) \tag{2.3}$$

のように書ける．したがって，$x = \bar{x}$ から $x = \bar{x}+\varepsilon$ になったときに関数 $f(x)$ が変化する勢いは，

$$\frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon} \tag{2.4}$$

のように表現される．これは，走っている車の勢い（速度）を表現するときに，移動した距離（つまり $f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})$）をかかった時間（つまり $(\bar{x}+\varepsilon) - \bar{x} = \varepsilon$）で割るのと同じ発想である．

(2.4) のように表現した「関数 f が変化する勢い」が，関数 f のグラフの傾き（よって微分係数）に等しいことを図を用いて説明しよう．図 2 に示したように，ε が十分に小さければ

$$f(\bar{x}+\varepsilon) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\varepsilon \tag{2.5}$$

のように書ける[10]．とくに，ε の値が小さければ小さいほど図中の A 点が B 点に近付くので，(2.5) の近似が精確なものになることも見てとれる．(2.5) の両辺を ε で割って並べ替えれば

$$\frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon} \approx f'(\bar{x}) \tag{2.7}$$

となり，ε の値が小さければ小さいほど両辺の値は近付く．つまり，十分に小さい x の変化量 $\varepsilon \neq 0$ に対して関数 f が反応する勢い（左辺）は関数 f のグラフの傾き（右辺）に等しい．

---

[9] 記号 ε はギリシア文字で「イプシロン」と読み，「小さな値」を代表する変数としてしばしば用いられる．

[10] ちなみに，(2.5) は，$x := \bar{x}+\varepsilon$ とおけば

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) =: g(x) \tag{2.6}$$

と書くこともできる．ε が十分に小さいということは，x が $\bar{x}$ に十分に近いということに等しい．したがってこの式は，$\bar{x}$ の周辺では，$f(x)$ と $g(x)$ の値はおおよそ等しくなることを意味する．右辺の関数 $g(x)$ が x に関して線形（ここで $f(\bar{x})$ や $f'(\bar{x})$ は単なる数字で x のみが変数）であることから，(2.6) のような形で書くことを「f を $\bar{x}$ のまわりで線形近似（linearly approximate）する」と言う．

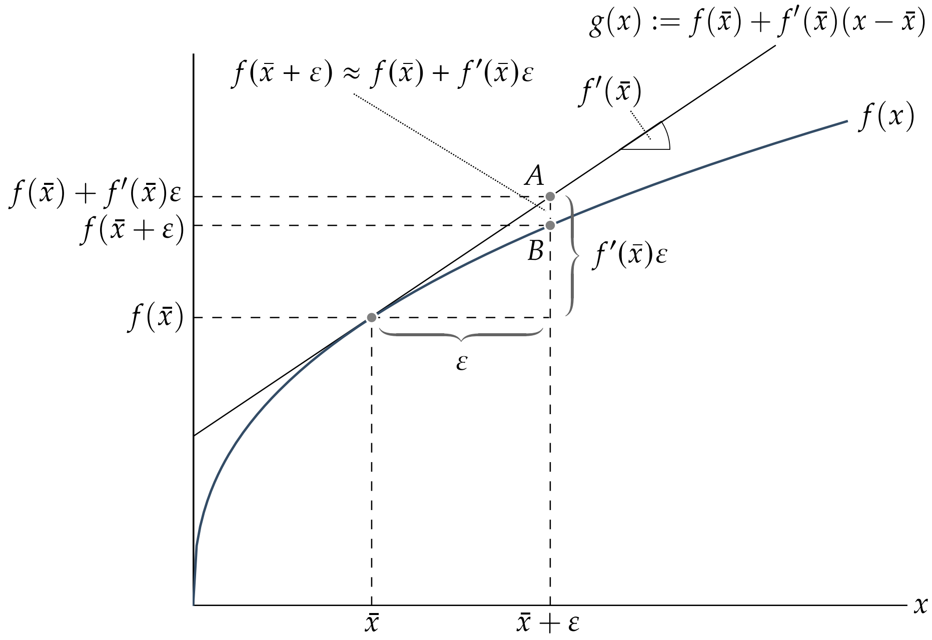

図 2: 1 変数関数 $f(x)$ の微分と $g(x)$ による線形近似

2.2 冪関数，指数関数，対数関数の微分

関数の微分係数を求める計算は，決して難しいものではない．とくに，代表的な関数についてはその微分係数を求めるための公式が知られているので，与えられた公式を用いて計算すればよい．

まず，冪関数 x^a の微分係数は

$$(x^a)' = ax^{a-1} \tag{2.8}$$

で与えられる．例えば，

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (x)' = x^0 = 1, \quad (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} \tag{2.9}$$

である．また，指数関数 e^x の微分係数は

$$(e^x)' = e^x \tag{2.10}$$

である．つまり，関数 e^x の x における傾きは e^x の値と一致する．したがって，x が大きくなれば関数 e^x の傾きは急になってゆく．一方，自然対数関数 $\ln(x)$ の微分係数は

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \tag{2.11}$$

である．したがって，x が大きくなれば関数 $\ln(x)$ の傾きは緩やかになってゆく．これは図 1 からも明らかであろう．なお，

$$f(x) = 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

のように，x の値によらず一定値をとるような関数（constant function）のグラフは水平線になるから，その傾き（微分係数）は 0 である．例えば

$$(2)' = 0, \quad (1/2)' = 0, \quad (-99)' = 0, \quad (3.14)' = 0 \tag{2.12}$$

である．つまり，定数を微分すればゼロとなる．

2.3　微分の公式

やや込み入った関数について微分係数を求める際には，次の三つの公式を（多くの場合組み合わせて）使うことになる．

2.3.1　和の公式

二つの関数 $f : X \to \mathbb{R}$，$g : X \to \mathbb{R}$ について

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{2.13}$$

が成り立つ．つまり，「和の微分」は「微分の和」となる．例を挙げると，

$$(x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2 \tag{2.14}$$

であり，

$$(2 + x + x^2)' = (2 + x)' + (x^2)' = (2)' + (x)' + (x^2)' = 0 + 1 + 2x \tag{2.15}$$

である．また

$$(\ln(x) + \ln(x))' = (\ln(x))' + (\ln(x))' = 2/x \tag{2.16}$$

である．

2.3.2　積の公式

二つの関数 $f : X \to \mathbb{R}$，$g : X \to \mathbb{R}$ について

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{2.17}$$

が成り立つ．「積の微分」は「微分の積」とはならないので注意が必要である．例えば，

$$(x^3x^2)' = (x^3)'x^2 + x^3(x^2)' = 3x^2x^2 + x^3 2x = 5x^4 \tag{2.18}$$

であり，

$$(5x^2)' = (5)'x^2 + 5(x^2)' = 0 \cdot x^2 + 5 \cdot 2x = 10x \tag{2.19}$$

である．また

$$(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = (1+x)e^x \tag{2.20}$$

であり，

$$(x\ln(x))' = (x)'\ln(x) + x(\ln(x))' = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \tag{2.21}$$

である．

和の公式と積の公式を合わせると，例えば

$$\begin{aligned}(2x+3x^2)' &\overset{(2.13)}{=} (2x)' + (3x^2)' \\ &\overset{(2.17)}{=} (2)'x + 2(x)' + (3)'x^2 + 3(x^2)' \\ &= 0x + 2 + 0x^2 + 3 \cdot 2x \\ &= 2 + 6x \end{aligned}\tag{2.22}$$

のように計算できる．

2.3.3　連鎖律

二つの関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{2.23}$$

が成り立つ[11]．これは連鎖律（chain rule）と呼ばれる公式で，その理由は

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx} \tag{2.24}$$

のように，二つの微分が連鎖しているように書けるためである．連鎖律を理解するには，具体的な例に慣れ親しむのがよい．例えば，連鎖律を使って $(2x)^2$ を微分すると

$$\underbrace{((2x)^3)'}_{(f(g(x)))'} = \underbrace{3(2x)^{3-1}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(2x)'}_{g'(x)} = 3(2x)^2 \cdot 2 = 24x^2 \tag{2.25}$$

[11] 言い換えれば，合成関数 $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分が，2 つの微分係数 $f'(y)|_{y=g(x)}$ と $g'(x)$ との積で与えられるということである．

のように計算することになる．ここでは，

$$g(x) := 2x \quad \text{and} \quad f(g) := g^3 \tag{2.26}$$

と「見なし」て連鎖律の公式を適用している．別の例として，

$$((3+x)^2)' = 2(3+x)^{2-1} \cdot (3+x)' = 2(3+x) \cdot 1 = 6 + 2x \tag{2.27}$$

や

$$(e^{x+x^2})' = e^{x+x^2} \cdot (x+x^2)' = e^{x+x^2} \cdot ((x)' + (x^2)') = e^{x+x^2} \cdot (1+2x) \tag{2.28}$$

も連鎖律を用いた微分の計算である．前者の例では

$$g(x) := 3 + x \quad \text{および} \quad f(g) := g^2, \tag{2.29}$$

後者の例では

$$g(x) := x + x^2 \quad \text{および} \quad f(g) := e^g \tag{2.30}$$

と置いて連鎖律の公式を用いた．これらの例が示すように，連鎖律を用いる際には，f や g を自分で上手く定義しなければならない．つまり，与えられた式を，他の公式が適用できる形になるように「分解」することが求められる．これは基本的に慣れの問題であり，いくつか問題を解いているうちに自然と身に付く類のテクニックである．

3　偏微分

偏微分（partial derivative）と呼ばれるものも，微分と同じく，関数の傾きを表現するものである．両者の違いは，微分が 1 変数関数の傾きを表現するものであったのに対して，偏微分は多変数関数の「傾き」を表現するものであるという点である．以下では，2 次元の非負実数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2_+$ の上で定義される関数 $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を考える．つまり，$\mathbb{R}^2_+$ に含まれる点 (x_1, x_2) のそれぞれにに対して $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ というを関連付けるような関数を考える．

3.1　偏微分係数の意味

偏微分を理解するために，

$$f(x_1, x_2) := x_1^{1/2} x_2^{1/2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{3.1}$$

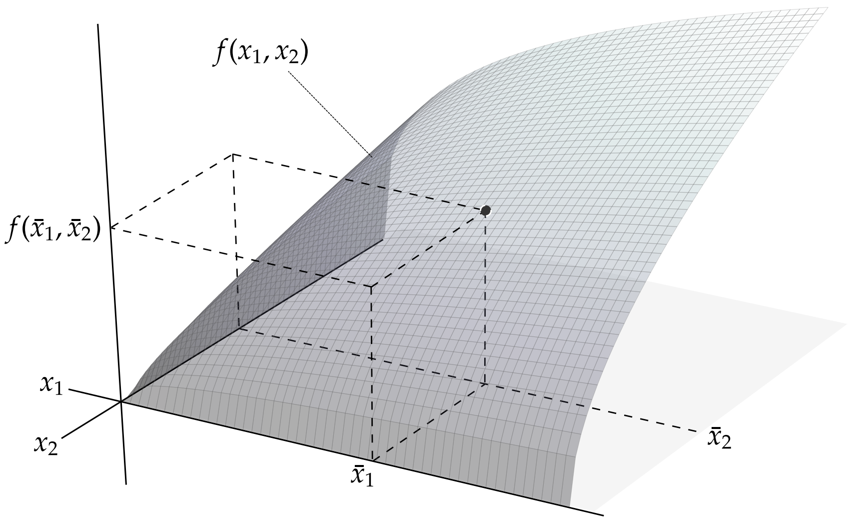

図 3: 2 変数関数 $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$

のような 2 変数関数 $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ を考えよう．これは 2 次元平面上の点を実数に関連付けるものであるから，図 3 に描いたように，そのグラフは 3 次元になる．例えば $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) := (9, 4) \in \mathbb{R}_+^2$ という特定の 2 次元ベクトルに対して，(3.1) で定義される関数 f は

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f(9, 4) = 9^{1/2} 4^{1/2} = 6 \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

という実数を関連付ける．我々が考えたいのは，このような関数の「傾き」である．1 変数関数であれば，傾きの定義は自明であろう．しかし 2 変数関数については，多少頭を使う必要がある．

2 変数関数の「傾き」を定義するために，まず x_2 をある特定の値 $\bar{x}_2$ に固定したまま，x_1 だけを変化させることを考えよう．すると f は，それぞれの $x_1 \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(x_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}$ を関連付ける 1 変数関数であると見なせる．例えば，(3.1) で定義される f について，x_2 を $\bar{x}_2 := 4$ で固定した場合，

$$f(x_1, \bar{x}_2) = x_1^{1/2} \bar{x}_2^{1/2} = x_1^{1/2} 2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}_+ \tag{3.3}$$

であるから，$f(x_1, \bar{x}_2)$ は 1 変数関数である．この $f(x_1, \bar{x}_2)$ は，図 4 に示したように，x_1 軸に沿って $\bar{x}_2$ を通るように関数 f のグラフを垂直に切断した時の「切り口」に相当する．この図 4 を真横から眺めたものが図 5 であるが，この図からも，$f(x_1, \bar{x}_2)$ が 1 変数関数であることが見て取れよう．

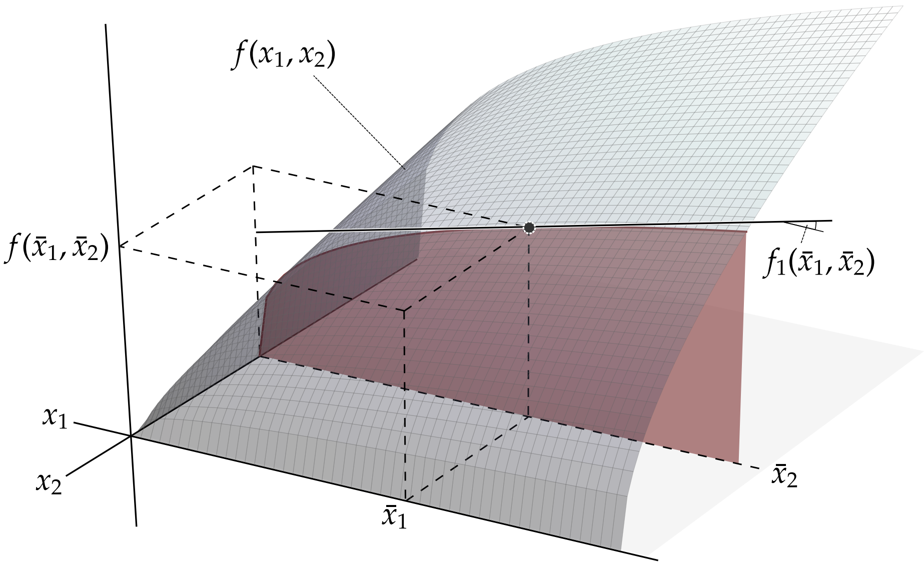

図 4: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ と 1 変数関数 $f(x_1, \bar{x}_2)$

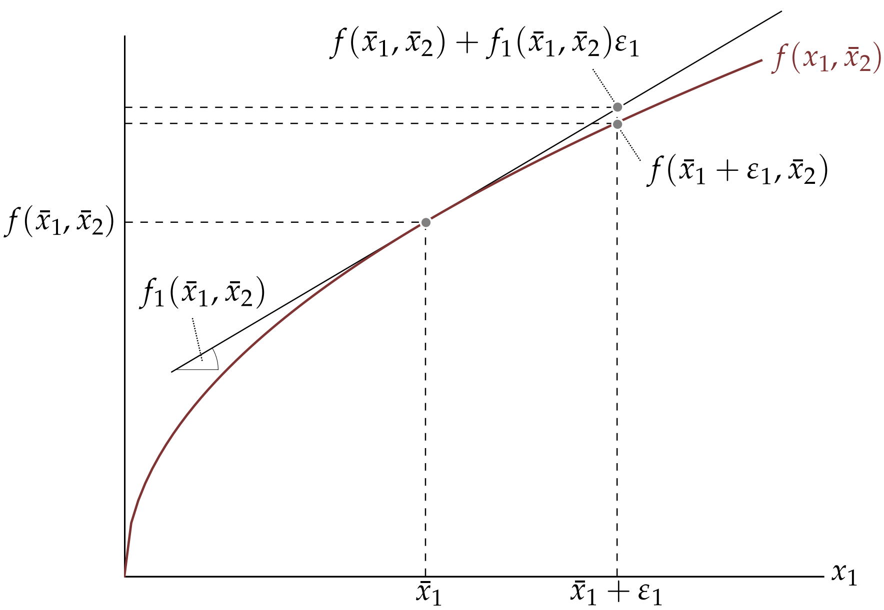

図 5: f の $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における x_1 に関する偏微分

$f(x_1, \bar{x}_2)$ は 1 変数関数であるから，それぞれの x_1 についてその点での傾きを考えることができる．そして，この 1 変数関数 $f(x_1, \bar{x}_2)$ の $x_1 = \bar{x}_1$ における傾きのことを，「$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における f の x_1 に関する偏微分係数」と呼び，

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad \text{あるいは} \quad f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \tag{3.4}$$

のように表記するのである（図 5）．1 変数関数の微分係数は，「変数を少し動かしたときに関数の値が変化する勢い」を表現したものであった．同様に，多変数関数の偏微分係数も，「ある一つの変数 ‘だけ’ を少し動かしたときに関数の値が変化する勢い」を表現したものである．実際，図 5 から，$\varepsilon_1 \neq 0$ が十分に小さければ

$$f(\bar{x}_1 + \varepsilon_1, \bar{x}_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\varepsilon_1 \tag{3.5}$$

であり，したがって

$$\frac{f(\bar{x}_1 + \varepsilon_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\varepsilon_1} \approx f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \tag{3.6}$$

と書けることが分かる．

一方，逆に x_1 をある特定の値 $\bar{x}_1$ に固定したまま，x_2 だけを変化させることも考えられる．例えば (3.1) で定義される f について，x_1 を $\bar{x}_1 := 9$ で固定した場合

$$f(\bar{x}_1, x_2) = \bar{x}_1^{1/2} x_2^{1/2} = 3x_2^{1/2} \tag{3.7}$$

という 1 変数関数を得る（図 6）．そして，この 1 変数関数 $f(\bar{x}_1, x_2)$ の $x_2 = \bar{x}_2$ における傾きのことを，「$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における f の x_2 に関する偏微分係数」と呼び，

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad \text{あるいは} \quad f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \tag{3.8}$$

のように表記する（図 7）．偏微分係数 $f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ は「x_2 だけを少し動かしたときに関数 $f(x_1, x_2)$ の値がどの程度変化するか」を表現したものである．というのも，図 7 から，$\varepsilon_2 \neq 0$ が十分に小さければ

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \varepsilon_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\varepsilon_2, \tag{3.9}$$

であり，したがって

$$\frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \varepsilon_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\varepsilon_2} \approx f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \tag{3.10}$$

と書くことができるからである．

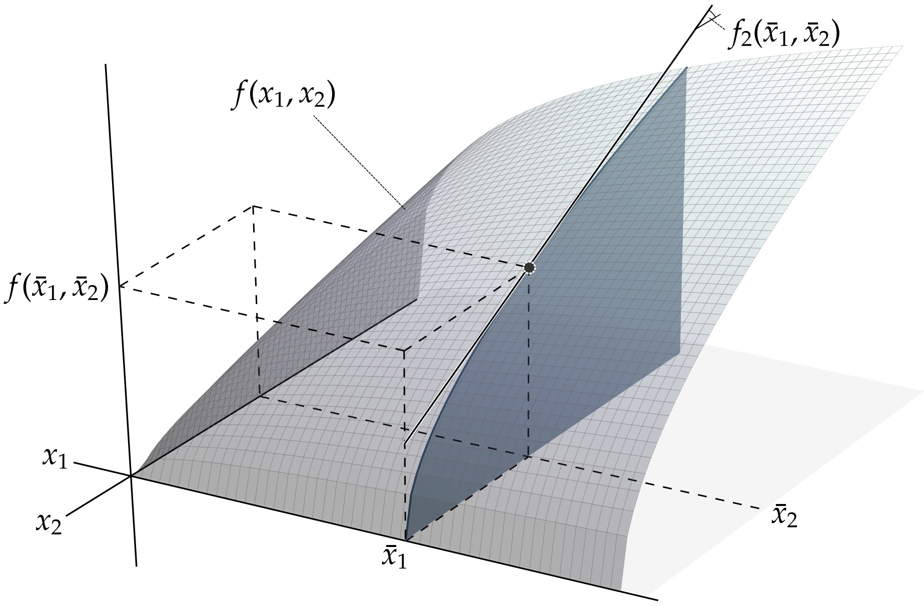

図 6: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ と 1 変数関数 $f(\bar{x}_1, x_2)$

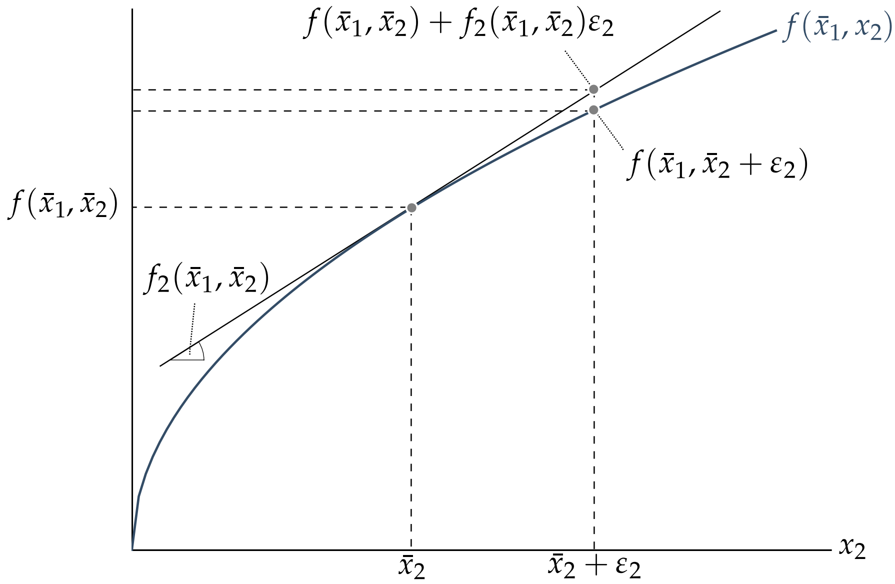

図 7: f の $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における x_2 に関する偏微分

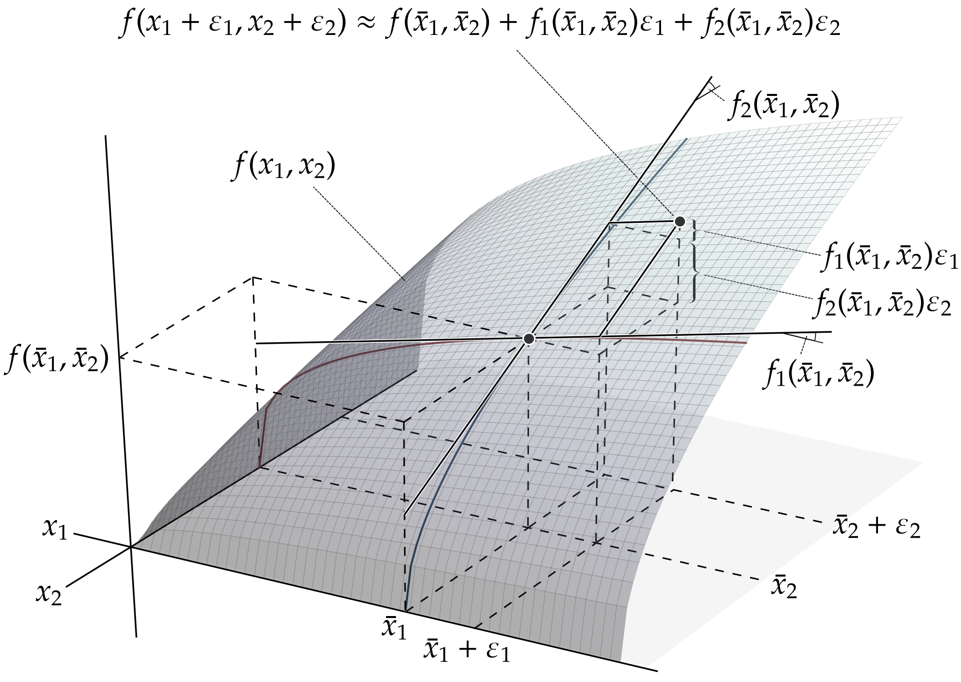

図 8: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ の全微分

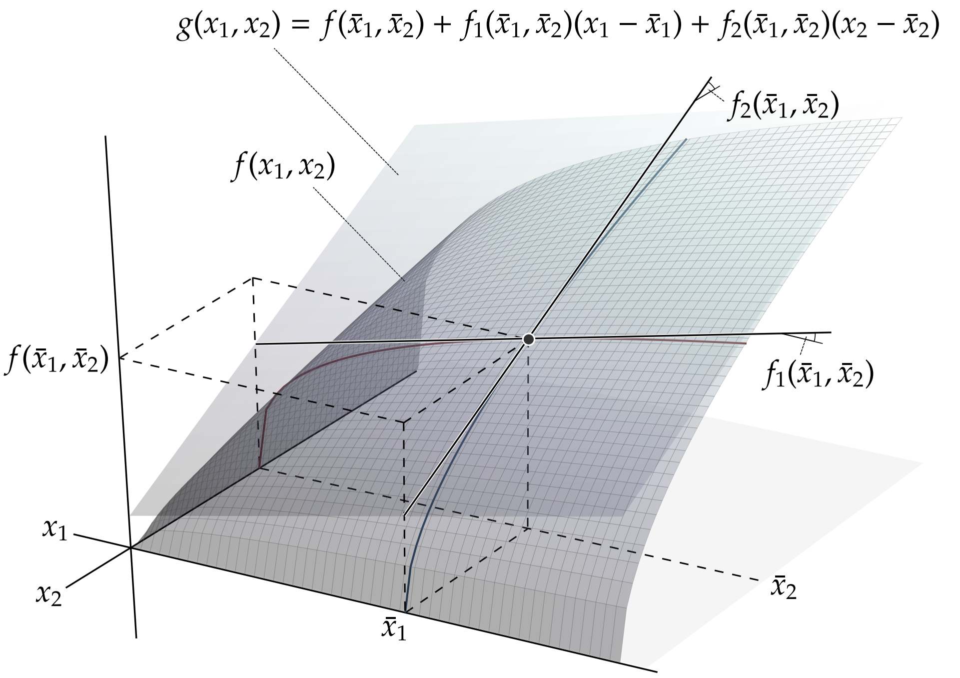

図 9: 2 変数関数 $g(x_1, x_2)$ による線形近似

さらに，(3.5) と (3.9) を逐次的に用いることで，十分に小さい ε_1 と ε_2 について，

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2+\varepsilon_2) &\approx f(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2)+f_2(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \\ &\approx f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_1+f_2(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \\ &\approx f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_1+f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

と書くことができる．最後の $\approx$ では，ε_1 と ε_2 が十分に小さければ

$$f_2(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \approx f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \tag{3.12}$$

が成立することを用いた[12]．ここで (3.11) が

$$f(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2+\varepsilon_2)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \approx f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_1+f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \tag{3.14}$$

のように書き換えられることに注意しよう．この式の左辺は，(x_1,x_2) が $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ から $(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2+\varepsilon_2)$ へと変化した時に，f の値がどれだけ変化するかを表わしている．(3.14) が示していることは，ε_1 と ε_2 が十分に小さければ，この f の変化分が，各変数についての「偏微分係数 $f_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ と変数の変化量 ε_i との積」を足し合わせたもので近似できるということである（図 8）．これを，f の $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ における全微分（total derivative）と言う[13]．図 8-9 と図 2 とを見比べてみれば，微分の考え方を多変数関数に素直に一般化したものが全微分であることが分かる．

3.2　2 変数関数の等高線

たった今導出した (3.14) という式に関連して，経済学への応用を念頭に，一点だけ重要な補足をしておく．いま考えている $f(x_1,x_2)$ は 2 変数関数であるから，一方の変数（例えば x_2）の値を変化させても，他方の変数（したがって x_1）の値をそれに応じて調整すれば，f の値を一定に保つことが可能である．例えば，図 10 に示したように，ある特定の点 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in\mathbb{R}^2$ を所与として

$$f(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2-\varepsilon_2)=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \tag{3.16}$$

---

[12] より正確には，偏導関数 $f_2(x_1,x_2)$ を x_1 に関してさらに偏微分したもの（交差微分係数（cross derivative）と呼ばれる）を $f_{21}(x_1,x_2)$ として

$$f_2(\bar{x}_1+\varepsilon_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2 \approx \left[f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+f_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_1\right]\varepsilon_2 = f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_2+f_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{3.13}$$

と書け，なおかつ $\varepsilon_1\varepsilon_2$ が相対的には無視できるほどに小さいという事実を用いればよい．

[13] ちなみに (3.14) は，$x_1:=\bar{x}_1+\varepsilon_1$，$x_2:=\bar{x}_2+\varepsilon_2$ とおけば

$$f(x_1,x_2)\approx f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)(x_1-\bar{x}_1)+f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)(x_2-\bar{x}_2)=:g(x_1,x_2) \tag{3.15}$$

のように書くことができる．したがってこの式は，$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ の周辺では，$f(x_1,x_2)$ と $g(x_1,x_2)$ の値はおおよそ等しくなることを意味する．右辺の関数 $g(x_1,x_2)$ が x_1 と x_2 のそれぞれに関して線形（ここで $f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ や $f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，$f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ は単なる数字）であることから，(3.15) のような形で書くことを「f を $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ のまわりで線形近似する」と言う（図 9）．

を満たすような $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ を無数に見つけることができる．これは言い換えれば，

$$f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \tag{3.17}$$

を満たすような $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ を無数に見つけることができるということである．そこで，そのような $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ の集合を

$$I := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\} \tag{3.18}$$

と表記しよう．これは幾何的には，$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を通る平面で f を水平に切断した時の切り口を，x_1 と x_2 の座標面に投影したもの（つまりは等高線）である．

ここで，(3.16) を満たす $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ の中で，その値が「十分に小さい」ものを考える．するとそのような $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ については，(3.16) はもちろんのこと，(3.14) も成立するはずである．したがって，(3.14) と (3.16) とを合わせれば，

$$\begin{aligned} 0 &= f(\bar{x}_1 + \varepsilon_1, \bar{x}_2 + (-\varepsilon_2)) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ &\approx f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot \varepsilon_1 + f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot (-\varepsilon_2) \end{aligned} \tag{3.19}$$

と書くことができ[14]，これはすなわち

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \approx \frac{f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \tag{3.20}$$

である．左辺の $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ は，図 11 に示したように，A 点と B 点とを通る直線の傾き（の絶対値）である．したがって (3.20) は，A 点と B 点とを通る直線の傾きが，A 点における偏微分係数の比率で近似できることを示している．

また，(3.20) の近似は，ε_1 や ε_2 の値を小さくすれば小さくするほど精確なものとなる．というのも，ε_1 や ε_2 の値を小さくすれば小さくするほど，(3.14) の近似（したがって (3.19) の近似）がより精確なものになるからである．よって

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \tag{3.21}$$

である．左辺の $\lim_{\varepsilon_i \to 0}$ は，「ε_1 と ε_2 を 0 に限りなく近付けたとき」という気持ちを表わす記号である．ε_1 や ε_2 の値を小さくすることは，図 11 において，B 点を A 点に近付けてゆくことに相当する．また，B 点を A 点に十分に近付けた時，A 点と B 点とを通る直線の傾きは，等高線 I の A 点における接線の傾きと一致する．以上から，偏微分係数の比 $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ は，等高線 I の $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における接線の傾き（の絶対値）であることが分かる．

[14]ただし，x_2 の変化量は $-\varepsilon_2$ であるから，(3.14) の ε_2 を $-\varepsilon_2$ で置き換えた．

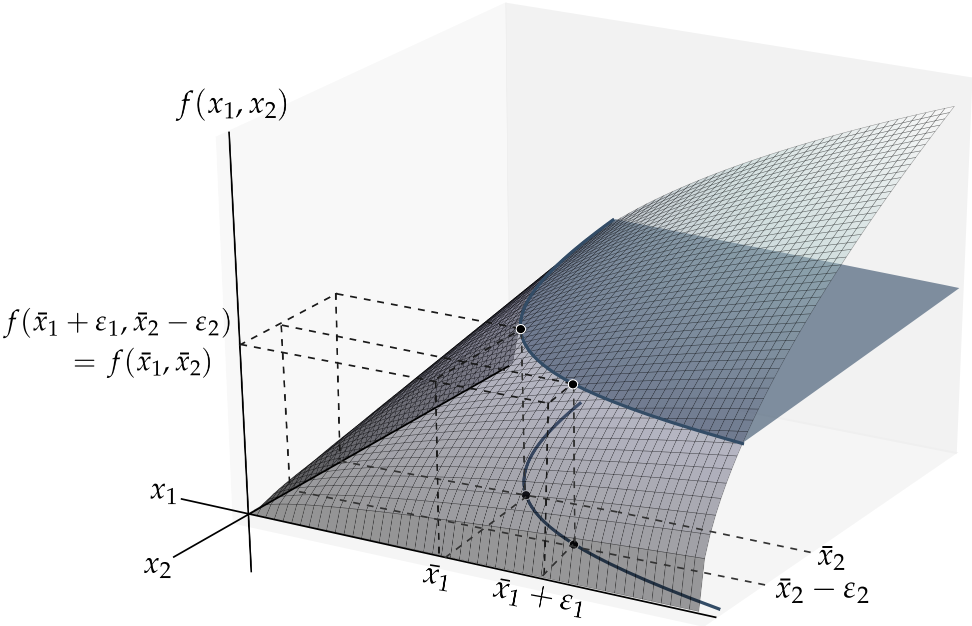

図 10: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ の「等高線」

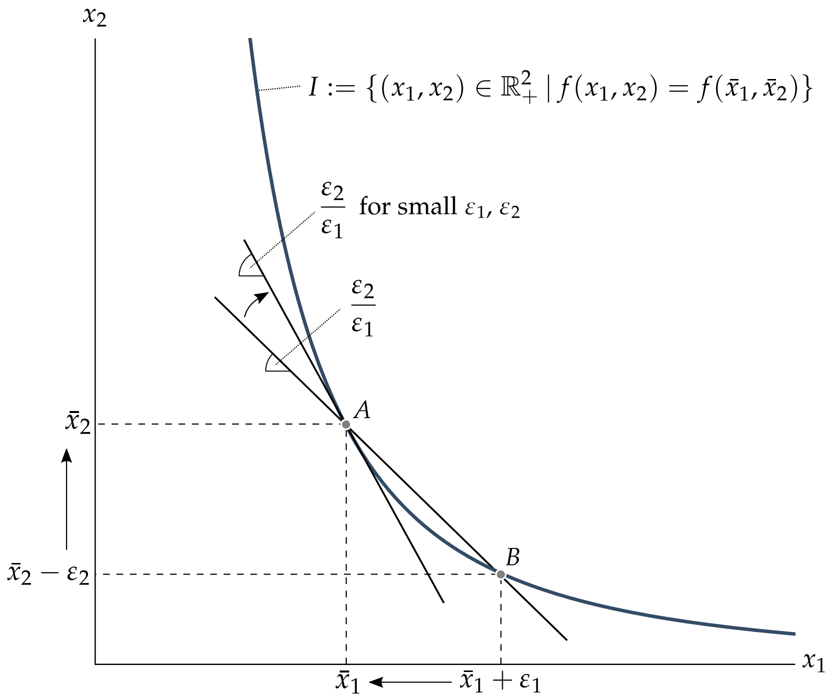

図 11: 等高線の接線の傾き

3.3 偏微分の例と等高線の接線の傾き

ある変数に関する偏微分係数を求めるためには，その定義から明らかなように，他の変数を定数であると見なして微分係数を求めればよい．例えば，

$$f(x_1, x_2) := x_1^{1/2} x_2^{1/2} \tag{3.22}$$

のような 2 変数関数を考えた場合

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1^{1/2})' \cdot x_2^{1/2} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} \cdot x_2^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-1/2} \tag{3.23}$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot (x_2^{1/2})' = x_1^{1/2} \frac{1}{2} \cdot x_2^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2} \tag{3.24}$$

のように計算できる．形式的には，1 変数関数の微分係数を求める作業と何ら変わるところはなく，難しいことを考える必要はない．

この例を用いて，偏微分係数の比が等高線の接線の傾きを表わすことも確認しておこう．いま，適当に $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を選んで，

$$f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \tag{3.25}$$

を満たす (x_1, x_2) の集合，すなわち

$$I := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1^{1/2} x_2^{1/2} = \bar{x}_1^{1/2} \bar{x}_2^{1/2}\} \tag{3.26}$$

なる集合 I（これは，図 11 に示したように，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を通る等高線である）を考える．この等高線の $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における接線の傾きは，前節の議論から，

$$\frac{f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right)^{-1/2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right)^{1/2}} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} \tag{3.27}$$

によって計算できるはずである．具体的な計算例として，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (3, 3)$ と置いてみると，等高線

$$I := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1^{1/2} x_2^{1/2} = \bar{x}_1^{1/2} \bar{x}_2^{1/2} = 3\} \tag{3.28}$$

の $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (3, 3)$ における傾きは，

$$\frac{f_1(3, 3)}{f_2(3, 3)} = \frac{3}{3} = 1 \tag{3.29}$$

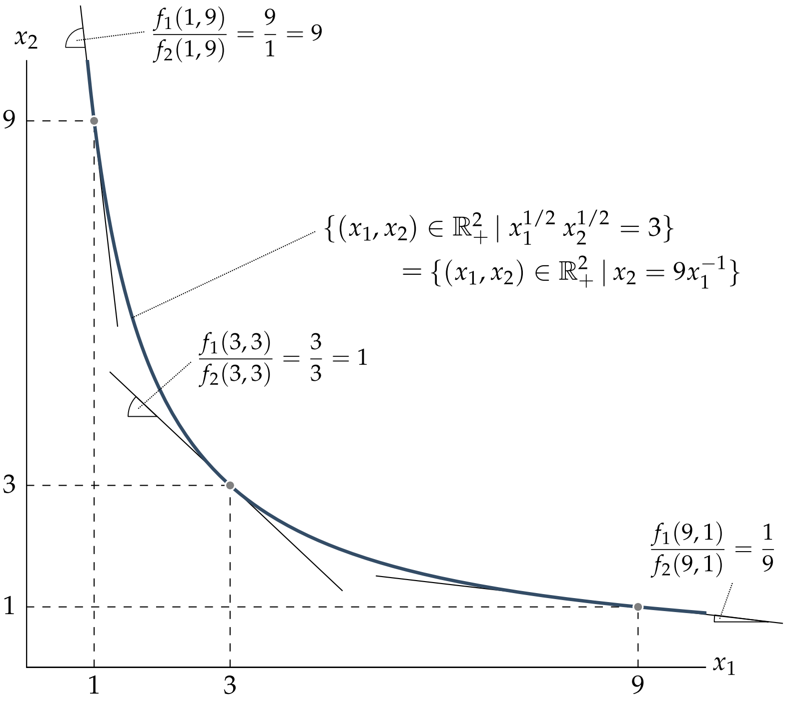

図 12: 偏微分係数の比率と接線の傾き

と計算できる．この結果が正しいことを確認するために，I が

$$
\begin{aligned}
I &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1^{1/2} x_2^{1/2} = 3\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1 x_2 = 3^2 = 9\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_2 = 9x_1^{-1}\}
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

と書けることに注意しよう．つまり等高線 I は，x_2 と x_1 との関係式

$$
x_2 = 9\frac{1}{x_1} =: g(x_1) \tag{3.31}
$$

の描くグラフに等しい（図 12）．このグラフの傾きは，微分係数 $g'(x_1)$ によって与えられるから

$$
g'(x_1) = -9\frac{1}{x_1^2} \tag{3.32}
$$

である．とくに $x_1 = 3$（したがって $x_2 = g(3) = 3$）における傾きは

$$
g'(3) = -9\frac{1}{3^2} = -1 \tag{3.33}
$$

と計算できるから，実際に (3.29) が等高線 I の接線の傾き（の絶対値）を与えてい

ることが確認できる．また別の点として，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 9)$ や $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 9)$ と置いてみると，

$$f(1, 9) = f(9, 1) = 3 = f(3, 3) \tag{3.34}$$

であるから，いずれの点も同じ I に含まれ，接線の傾きはそれぞれ

$$\frac{f_1(1, 9)}{f_2(1, 9)} = \frac{9}{1} = 9, \quad \frac{f_1(9, 1)}{f_2(9, 1)} = \frac{1}{9} \tag{3.35}$$

である．

3.4 偏微分の公式

偏微分は（他の変数を固定した場合の）微分と同じであるから，その計算には微分の公式をそのまま用いることができる．ここでは追加的な公式として，偏微分の連鎖律を与えておく．

まず，ある一つの 2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と，二つの 1 変数関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，

$$f(g(x), h(x)) \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.36}$$

は 1 変数関数となることに注意する[15]．例えば，

$$f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2)^3 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.37}$$

および

$$g(x) := x^{1/3}, \quad h(x) := x^{2/3} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

のような関数を考えた時，

$$f(g(x), h(x)) = (g(x) + h(x))^3 = \left(x^{1/3} + x^{2/3}\right)^3 \tag{3.39}$$

であるから，$f(g(x), h(x))$ は実数 x を別の実数 $(x^{1/3} + x^{2/3})^3$ に関連付ける 1 変数関数である．すると，$f(g(x), h(x))$ は 1 変数関数であるから，通常の意味の微分，すなわち

$$\frac{df(g(x), h(x))}{dx} \tag{3.40}$$

を考えることができる．偏微分の連鎖律とは，この微分係数の値が

$$\frac{df(g(x), h(x))}{dx} = f_1(g(x), h(x))g'(x) + f_2(g(x), h(x))h'(x) \tag{3.41}$$

によって計算できる，というものである．

[15] 合成関数の詳細は付録 C を参照のこと．

具体的には，(3.39) の例で微分を直接計算すれば

$$\begin{aligned}\frac{df(g(x),h(x))}{dx} &= \left(\left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^3\right)' \\ &= 3\left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2\cdot\left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)' \\ &= 3\left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2\cdot\left(\left(x^{1/3}\right)'+\left(x^{2/3}\right)'\right) \\ &= 3\left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) \\ &= \left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2\cdot\left(x^{-2/3}+2x^{-1/3}\right) \end{aligned}\tag{3.42}$$

である．一方，(3.41) の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}&f_1(g(x),h(x))g'(x)+f_2(g(x),h(x))h'(x) \\ &\quad= \left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2x^{-2/3}+\left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2 2x^{-1/3} \\ &\quad= \left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)^2\left(x^{-2/3}+2x^{-1/3}\right)\end{aligned}\tag{3.43}$$

であると分かるから，(3.41) の公式が成立していることが確認できる．

別の例として

$$f(x_1,x_2) := x_1^{1/2}x_2^{1/2}\tag{3.44}$$

および

$$g(x) := x,\quad h(x) := 4-\frac{2}{3}x\tag{3.45}$$

というケースを考えよう．我々が知りたいのは，1 変数関数

$$f(g(x),h(x)) = f(x,4-(2/3)x) = x^{1/2}(4-(2/3)x)^{1/2}\tag{3.46}$$

の微分係数である．これは，(3.41) の公式を用いれば，

$$\begin{aligned}\frac{df(g(x),h(x))}{dx} &= f_1(g(x),h(x))g'(x)+f_2(g(x),h(x))h'(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4-(2/3)x}\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4-(2/3)x}\right)^{1/2}\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4-(2/3)x}\right)^{1/2}\left(\frac{4-(2/3)x}{x}-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}\tag{3.47}$$

と直ちに計算できる．

ちなみに，(3.46) で定義される 1 変数関数 $f(g(x),h(x))$ について，その値を最大にするような x を考えてみよう．(3.46) を若干変形すれば

$$\begin{aligned} f(g(x),h(x)) &= x^{1/2}(4-(2/3)x)^{1/2} \\ &= \left(x\left(4-\left(\frac{2}{3}\right)x\right)\right)^{1/2} \\ &= \left(6-\frac{2}{3}(x-3)^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.48}$$

であるから，$f(g(x),h(x))$ は $x=3$ の時に最大値をとることが分かる．そして $x=3$ における $f(g(x),h(x))$ の微分係数は，(3.47) から

$$\frac{df(g(3),h(3))}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4-(2/3)3}\right)^{1/2}\left(\frac{4-(2/3)3}{3}-\frac{2}{3}\right) = 0 \tag{3.49}$$

となる．これは，関数の値を最大にする x において，その関数の傾きは 0 になっていなければならないという事実を示す一例である．

4　関数の最大化

ある集合 X と，その部分集合 $S \subset X$ を考える．X を定義域とする関数 $f: X \to \mathbb{R}$ について，S に含まれるある要素 $x^* \in S$ が

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in S \tag{4.1}$$

を満たす時，「x^* は S 上で f の最大値（maximum）を与える」と言う．このような，S 上で f の最大値を与える要素の集合を

$$\operatorname*{argmax}_{x\in S} f(x) \quad \text{あるいは} \quad \operatorname{argmax}\{f(x)\in\mathbb{R} \mid x\in S\} \tag{4.2}$$

のように表記する．よって，ある要素 $x^* \in S$ が (4.1) を満たすということは，

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x\in S} f(x) \quad \text{あるいは} \quad x^* \in \operatorname{argmax}\{f(x)\in\mathbb{R} \mid x\in S\} \tag{4.3}$$

のように表記される．経済学では，関数の最大値 $f(x^*)$ そのものが重要になることもあるが，最大値を与える要素 x^* を見付け出すこと（およびそのような x^* を特徴付けること）が主な課題となる[16]．

[16] これは例えば，消費者理論で登場する効用関数（utility function）が，背後にある選好（ランキング）を表現したものに過ぎないからである．

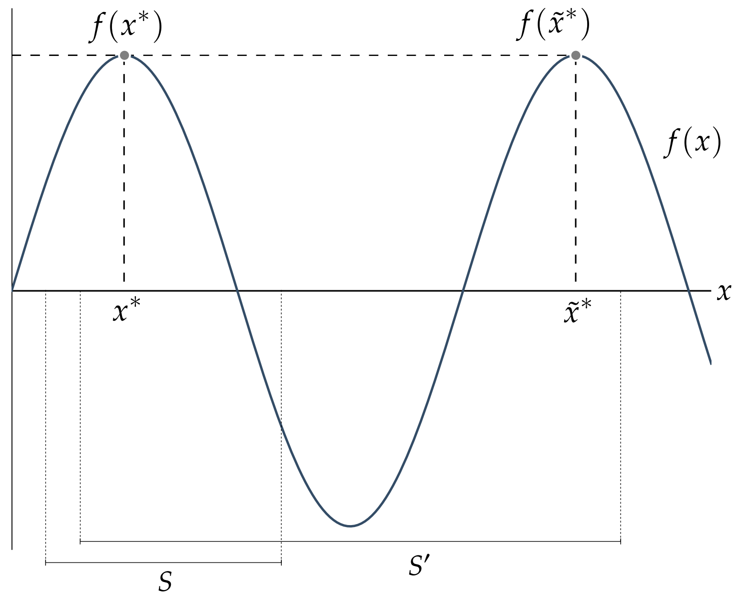

図 13: 関数の最大値

一例として，図 13 のような関数 f を考えよう．図に記された集合 S 上で f の最大値を与えるのは x^* であるから，

$$\operatorname*{argmax}_{x \in S} f(x) = \{x^*\} \tag{4.4}$$

である．一方，別の集合 S' 上で考えると，x^* だけでなく，$\tilde{x}^*$ も f の最大値を与える．したがって，

$$\operatorname*{argmax}_{x \in S'} f(x) = \{x^*, \tilde{x}^*\} \tag{4.5}$$

となる．

4.1　微分を用いない解法

さしあたって微分を用いずに，関数の最大化問題を解くこと（つまり (4.1) を満たす x^* を見つけ出すこと）を考える．

4.1.1　1 変数関数の最大化（制約なし）

定義域を $X := \mathbb{R}$ として，

$$f(x) := -x^2 + 4x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

で定義される関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を例にとろう．S については，実数全体（つまり $S := \mathbb{R}$）を考える．いま，S 上で f の最大値を与える $x \in S$ を見つけたいとする．これは最適化問題（optimization problem）と呼ばれる問題の一種である．

この例では，(4.6) で定義される関数 f が

$$f(x) = 3 - (x-2)^2 \tag{4.7}$$

のように書けることに注意する．すると，右辺の第二項は必ず非負の値をとるから

$$3 \geq f(x) \quad \forall x \in S \tag{4.8}$$

である．一方，

$$f(2) = 3 - (2-2)^2 = 3 \tag{4.9}$$

であるから，(4.8) と (4.9) とを合わせて考えれば，2 は S 上で f の最大値を与えることが分かる．したがって，

$$2 \in \operatorname*{argmax}_{x \in S} f(x) \tag{4.10}$$

である．

4.1.2　2 変数関数の最大化（制約なし）

別の例として，定義域を $X := \mathbb{R}^2$ として，

$$f(x_1, x_2) := e^{4-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.11}$$

で定義される 2 変数の関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考えよう．$S \subset X$ については，2 次元実数ベクトル全体（つまり $S := \mathbb{R}^2$）を考え，この S 上で f を最大にする (x_1, x_2) を見つけることにする．ここで，指数関数 e^x が増加関数であることに注意すれば，

$$4 - (x_1-3)^2 - (x_2-2)^2 \tag{4.12}$$

を最大にする (x_1, x_2) を探せばよいことが分かる．明らかに，

$$f(3, 2) = e^4 \geq f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.13}$$

であるから，

$$(3, 2) \in \operatorname*{argmax}_{(x_1, x_2) \in S} f(x_1, x_2) \tag{4.14}$$

である．

4.1.3　2 変数関数の最大化（線形制約付き）

もう少し複雑な例として，定義域を $X := \mathbb{R}^2_+$ として，

$$f(x_1, x_2) := x_1^{1/2} x_2^{1/2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{4.15}$$

で定義される関数 $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を考えよう．今回は $S \subset X$ を，

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 2x_1 + 3x_2 = 12\} \tag{4.16}$$

としてみる．これは，制約付最適化問題（constrained optimization problem）と呼ばれるものの一例である．つまり $f(x_1, x_2)$ の最大値を与える (x_1, x_2) を，

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \tag{4.17}$$

という制約（constraint）を満たすものの中から探すという問題である．

制約を満たす限り，x_1 の値を選べば x_2 の値も $x_2 = 4 - (2/3)x_1$ のように決まってしまう，ということに注意しよう．すると問題は，(4.15) に $x_2 = 4 - (2/3)x_1$ を代入した

$$f(x_1, 4 - (2/3)x_1) = x_1^{1/2}(4 - (2/3)x_1)^{1/2} \tag{4.18}$$

という 1 変数関数を最大にする x_1 を（制約なしで，つまりは $\mathbb{R}_+$ 全体の中から）探すことに等しい．幾何的には，集合 S（これは (4.17) を満たす直線である）を通る平面で $f(x_1, x_2)$ を垂直に切断し，その切り口によって与えられる関数が (4.18) である（図 14，図 15）．

(4.18) を若干変形すれば

$$f(x_1, 4 - (2/3)x_1) = x_1^{1/2}(4 - (2/3)x_1)^{1/2} = \left(6 - \frac{2}{3}(x_1 - 3)^2\right)^{1/2} \tag{4.19}$$

であるから，$f(x_1, 4 - (2/3)x_1)$ は $x_1 = 3$ の時に最大値をとることが分かる．したがって，対応する x_2 の値は $x_2 = 4 - (2/3)3 = 2$ であり，

$$(3, 2) \in \operatorname{argmax}\{f(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \,|\, (x_1, x_2) \in S\} \tag{4.20}$$

となる．これは，制約 S の内容をより明示的に反映させて，

$$(3, 2) \in \operatorname{argmax}\{f(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \,|\, 2x_1 + 3x_2 = 12\} \tag{4.21}$$

のように書くことも多い．

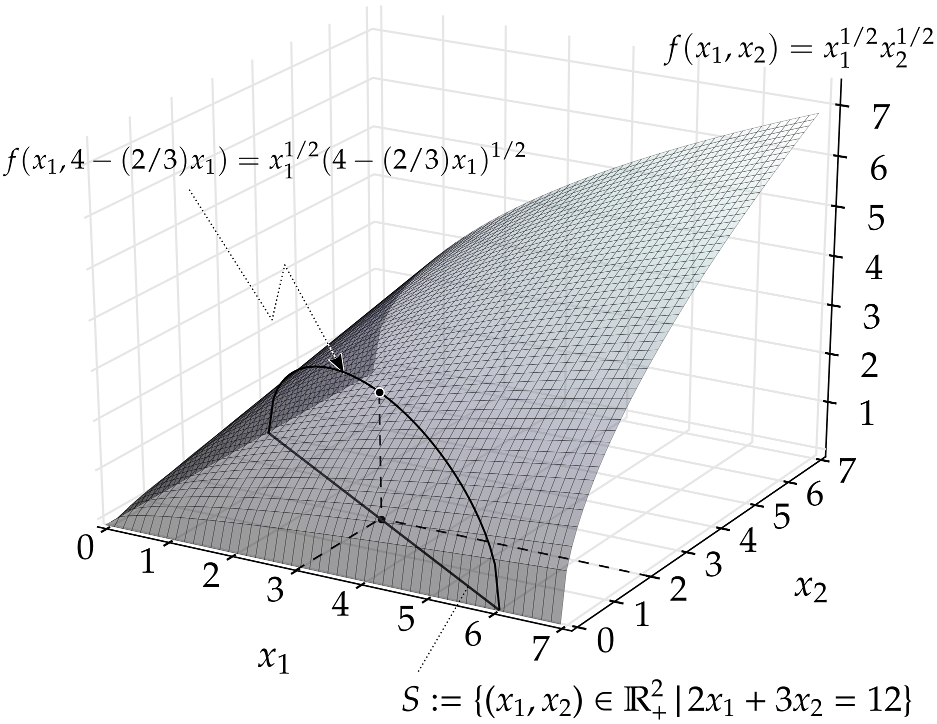

図 14: 2 変数関数 $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ の制約付最大化

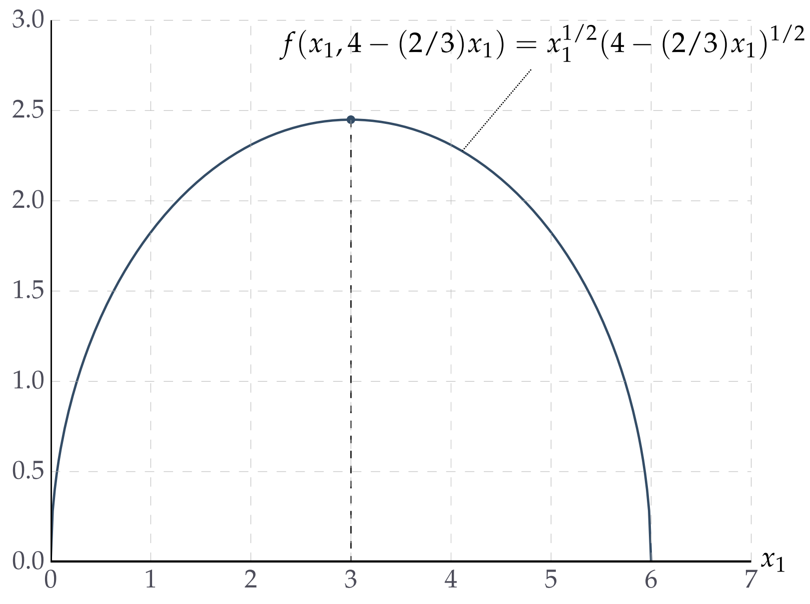

図 15: 制約 $2x_1 + 3x_2 = 12$ 上の $f(x_1, x_2)$ の断面図

4.2　微分を用いた解法

前節の例のように，関数を都合のよい形に変形できるとは限らない．最大化問題を解くより汎用性のある解法は，微分を用いるものである．

4.2.1　1 変数関数の最大化（制約なし）

次の定理の主張は，幾何的には明らかであろう．

定理 1. 1 変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，ある点 x^* が $\mathbb{R}$ 上で f の最大値を与えるならば

$$f'(x^*) = 0 \tag{4.22}$$

が成立していなければならない．

微分係数がグラフの傾きであったことを思い出せば，定理 1 は「山の頂上では傾きが 0 になっているはず」と言っているに過ぎない．

定理 1 を用いて，1 変数関数の最大化問題を解いてみる．再び定義域を $X := \mathbb{R}$ として，

$$f(x) := -x^2 + 4x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

で定義される関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えよう．S については実数全体を考えることにする．ここで，S 上で f の最大値を与える x を，他の x と区別するために x^* と書こう．我々は，この x^* がどのような値かはまだ知らない．ただし定理 1 から，x^* が

$$f'(x^*) = 0 \tag{4.24}$$

を満たすことは知っている．したがって，(4.24) を x^* について解けば，x^* の値を求めることができるはずである．

いま，f は (4.23) で定義されていたから，

$$f'(x) = -2x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.25}$$

である．よって，(4.24) を用いれば

$$f'(x^*) = 0 \iff -2x^* + 4 = 0 \iff x^* = 2 \tag{4.26}$$

のように，x^* の値を求めることができる．この $x^* = 2$ が S 上で f を最大化するものであることは，既に微分を用いない方法で確認した通りである．定理 1 を用いても，4.1.1 節と同様に

$$2 \in \operatorname*{argmax}_{x \in S} f(x) \tag{4.27}$$

という結論に至る．

4.2.2　2 変数関数の最大化（制約なし）

2 変数関数の最大化問題も，1 変数関数のそれと同様に解くことができる．ただし 2 変数関数の最適解は，微分ではなく偏微分によって特徴付けられる．

定理 2. 2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について，ある点 (x_1^*, x_2^*) が $\mathbb{R}^2$ 上で f の最大値を与えるならば

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0 \quad \text{かつ} \quad f_2(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{4.28}$$

が成立していなければならない．

この定理も，幾何的に考えれば理解し易いものであろう．偏微分係数が「切り口」によって与えられるグラフの傾きであったことを思い出せば，定理 2 は「山の頂上ではいずれの切り口の傾きも 0 になっているはず」と言っているに過ぎない．これは，図 16 および図 17 を見れば明らかである．

実際に，定理 2 を用いて 2 変数関数の最大化問題を解いてみる．定義域を $X := \mathbb{R}^2$ として，

$$f(x_1, x_2) := e^{4-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.29}$$

で定義される関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を再び考えよう．ここで，$S := \mathbb{R}^2$ 上で f の最大値を与える (x_1, x_2) を，他の (x_1, x_2) と区別するために (x_1^*, x_2^*) と書く．我々は，この (x_1^*, x_2^*) がどのような値かはまだ知らない．ただし定理 2 から，(x_1^*, x_2^*) が

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0 \quad \text{かつ} \quad f_2(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{4.30}$$

を満たすことは知っている．したがって，(4.30) を (x_1^*, x_2^*) について解けば，(x_1^*, x_2^*) の値を求めることができるはずである．

いま，f は (4.29) で定義されていたから，

$$f_1(x_1, x_2) = -2(x_1 - 3)e^{4-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.31}$$

$$f_2(x_1, x_2) = -2(x_2 - 2)e^{4-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.32}$$

である．よって，(4.30) を用いれば

$$-2(x_1^* - 3)e^{4-(x_1^*-3)^2-(x_2^*-2)^2} = 0 \iff x_1^* = 3 \tag{4.33}$$

$$-2(x_2^* - 2)e^{4-(x_1^*-3)^2-(x_2^*-2)^2} = 0 \iff x_2^* = 2 \tag{4.34}$$

と計算できるから，$(x_1^*, x_2^*) = (3, 2)$ である．この結果は，4.1.2 節で示した微分を用いない方法の結果とも一致する．

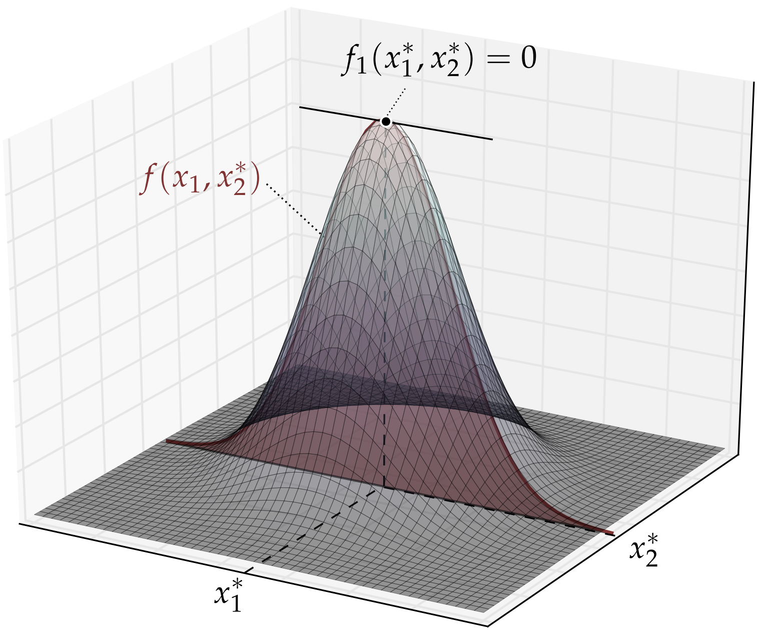

図 16: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ の最大化と偏微分係数

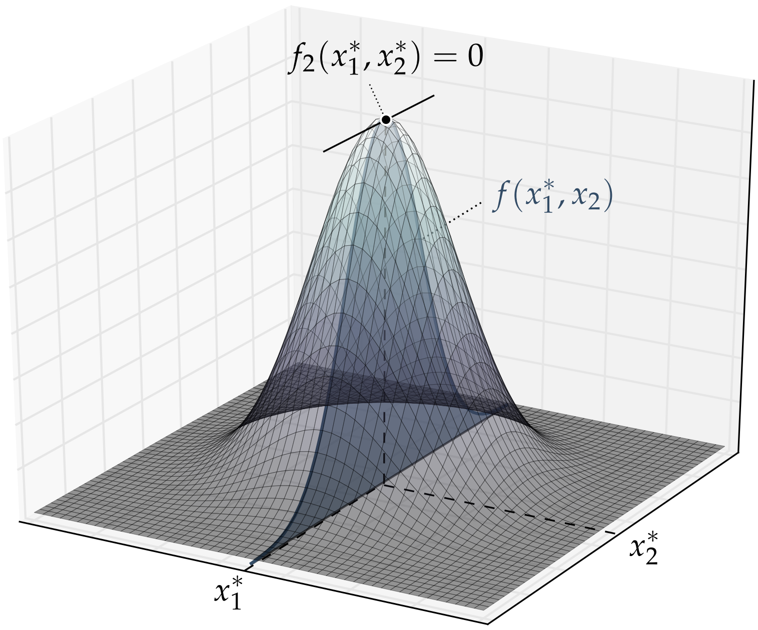

図 17: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ の最大化と偏微分係数

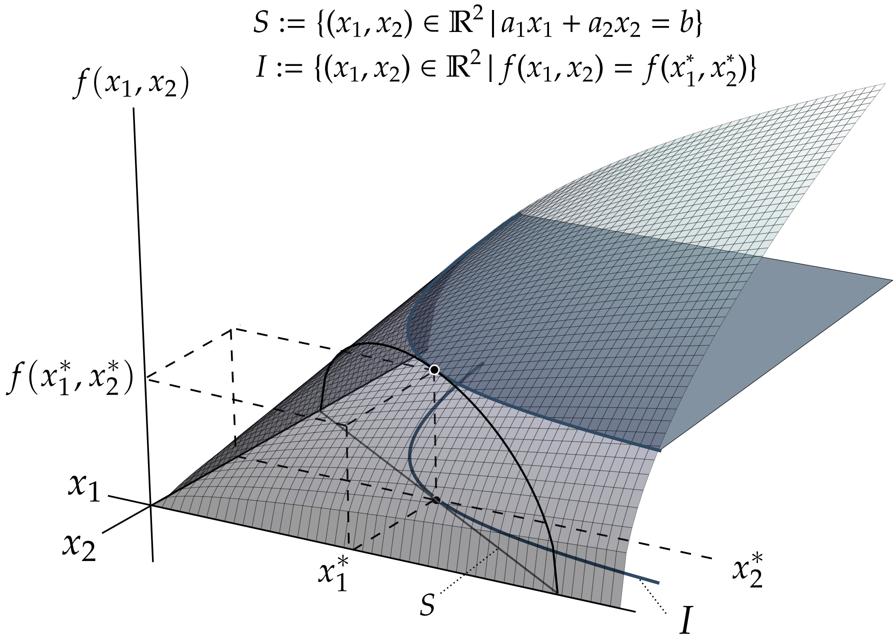

図 18: 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ の制約付最大化

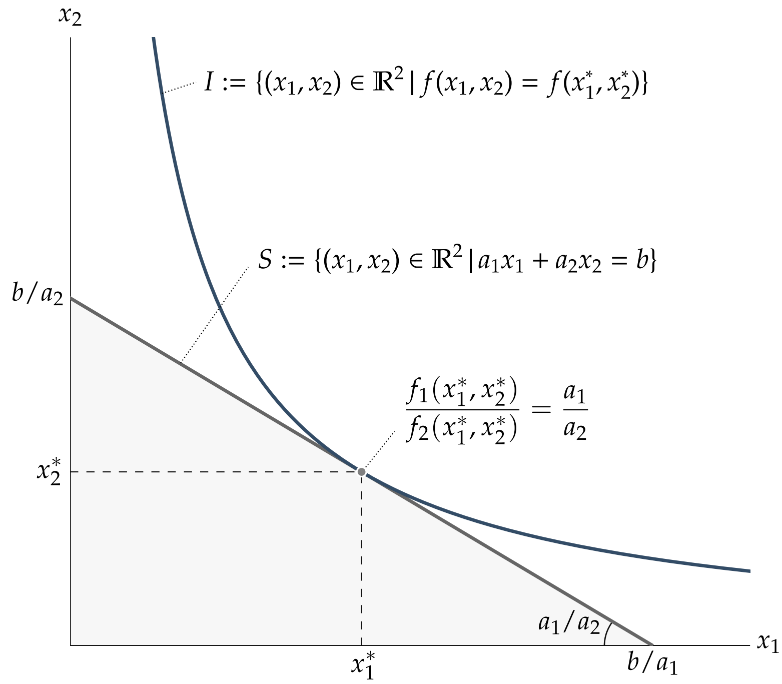

図 19: 最適点 (x_1^*, x_2^*) を通る等高線 I と制約線 S

4.2.3　2 変数関数の最大化（線形制約付き）

2 変数関数の制約付最大化問題についても，その解を求めるための定理を与えておこう．

定理 3. 2 次元実数空間の部分集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ を

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 = b\} \tag{4.35}$$

で定義する．ただしここで，a_1, a_2, b はいずれも正の実数とする．この時，2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について，ある点 (x_1^*, x_2^*) が S 上で f の最大値を与えるならば

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{a_1}{a_2} \tag{4.36}$$

かつ

$$a_1x_1^* + a_2x_2^* = b \tag{4.37}$$

が成立していなければならない．

偏微分係数の比が，幾何的には等高線の接線の傾きであったことを思い出せば，この定理の内容にも納得できるはずである．定理 3 の主張は「山を適当なところで垂直に切断した時，その切り口の最も高い所を通る等高線は，切断面とちょうど一点で接する」という（おおよそ自明の）ことである．これは，図 18 および図 19 を見れば理解されよう．

　もしこの説明で満足できないのであれば，4.1.3 節と同じように，制約式を関数に代入して

$$f(x_1, b - (a_1/a_2)x_1) \tag{4.38}$$

という x_1 に関する 1 変数関数を考えてみるとよい．この (4.38) は，4.1.3 節でも説明したように，制約式を表わす集合 S（これは直線である）を通る平面で $f(x_1, x_2)$ を垂直に切断した時に，その切り口によって与えられる関数である．したがって，我々が本来解きたい 2 変数関数の制約付最大化問題は，(4.38) で定義される 1 変数関数の（制約なし）最大化問題と等しい．1 変数関数の最大化問題については，定理 1 が適用できるはずである．したがって x_1^* が $f(x_1, b - (a_1/a_2)x_1)$ の最大値を与えるのであれば，

$$\frac{d}{dx_1} f(x_1^*, b - (a_1/a_2)x_1^*) = 0 \tag{4.39}$$

が成立しなければならない．一方，この式の左辺は，偏微分の連鎖律から

$$\frac{d}{dx_1} f(x_1^*, b-(a_1/a_2)x_1^*) = f_1(x_1^*, b-(a_1/a_2)x_1^*) - \frac{a_1}{a_2} f_2(x_1^*, b-(a_1/a_2)x_1^*) \tag{4.40}$$

のように書き直すことができる．よって，(4.39) と (4.40) とを合わせれば，

$$f_1(x_1^*, b-(a_1/a_2)x_1^*) - \frac{a_1}{a_2} f_2(x_1^*, b-(a_1/a_2)x_1^*) = 0 \tag{4.41}$$

を得る．したがってまず，x_1^* はこの式を満たさなければならない．一方，制約式 (4.37) も同時に成立しなければならないので，x_1^* の値に応じて，x_2^* も

$$x_2^* = b - (a_1/a_2)x_1^* \tag{4.42}$$

のように定まる．(4.41) と (4.42) とを合わせれば，

$$f_1(x_1^*, x_2^*) - \frac{a_1}{a_2} f_2(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{4.43}$$

となり，これはすなわち (4.36) である．

定理 3 を用いて，実際に 2 変数関数の制約付最大化問題を解いてみよう．定義域を $X := \mathbb{R}_+^2$ として，

$$f(x_1, x_2) := x_1^{1/2} x_2^{1/2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \tag{4.44}$$

で定義される関数 $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ を考える．制約集合 $S \subset X$ は，

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 12\} \tag{4.45}$$

とする．ここで，S 上で f の最大値を与える (x_1, x_2) を，他の (x_1, x_2) と区別するために (x_1^*, x_2^*) と書こう．我々は，この (x_1^*, x_2^*) がどのような値かはまだ知らない．ただし定理 3 から，(x_1^*, x_2^*) が

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{2}{3} \tag{4.46}$$

かつ

$$2x_1^* + 3x_2^* = 12 \tag{4.47}$$

を満たすことは知っている．したがって，(4.46) と (4.47) を (x_1^*, x_2^*) について解けば，(x_1^*, x_2^*) の値を求めることができるはずである．

いま，f は (4.44) で定義されていたから，

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-1/2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{4.48}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \tag{4.49}$$

である．よって，(4.46) を用いれば

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)^{-1/2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)^{1/2}} = \frac{x_2^*}{x_1^*} \iff x_2^* = \frac{2}{3}x_1^* \tag{4.50}$$

を得る．これを (4.47) と合わせれば

$$2x_1^* + 3\frac{2}{3}x_1^* = 12 \iff x_1^* = 3 \tag{4.51}$$

であり，いま求めた $x_1^* = 3$ を (4.50) に代入すれば

$$x_2^* = \frac{2}{3}3 = 2 \tag{4.52}$$

を得る．したがって，S 上で f を最大にするのは

$$(x_1^*, x_2^*) = (3, 2) \tag{4.53}$$

であると分かり，4.1.3 節で（微分を用いずに）導いた結論と一致する．

5　積分

最後に，講義で扱う範囲に限って積分についても触れておこう．

5.1　定積分

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを考える．任意の区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ について，このグラフと x 軸とで囲まれる面積を関数 f の $[a, b]$ 上での定積分（definite integral）と言い

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ との間に

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \tag{5.1}$$

という関係が成り立つならば，定積分の値を

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{5.2}$$

によって計算することができる．(5.1) を満たすような $F(x)$ のことを $f(x)$ の原始関数（primitive function）と呼ぶ．

具体例を挙げよう．関数

$$f(x) := 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

の区間 $[0,5]$ 上での定積分を求める．例えば関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) := x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

のように定義すると，

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x) \quad \forall x \in [0,5]$$

が成り立つから，(5.2) により

$$\int_0^5 \underbrace{2x}_{f(x)}\,dx = \underbrace{5^2}_{F(5)} - \underbrace{0^2}_{F(0)} = 25$$

のように計算できる（図 20）．別の例として，関数

$$f(x) := 4x - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

の区間 $[2,4]$ 上での定積分を求める．この場合には，例えば関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) := 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

のように定義すると，

$$F'(x) = (2x^2)' - \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = 4x - x^2 = f(x) \quad \forall x \in [2,4]$$

が成り立つから，(5.2) により

$$\int_2^4 \underbrace{(4x - x^2)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\left(32 - \frac{1}{3}64\right)}_{F(4)} - \underbrace{\left(8 - \frac{1}{3}8\right)}_{F(2)} = \frac{16}{3}$$

のように計算できる（図 21）．

これらの具体例から明らかなように，定積分の値を計算するときには，(5.1) を満たすような原始関数 $F(x)$，すなわち「微分をすると関数 $f(x)$ になるような関数」を見つけてやればよい．

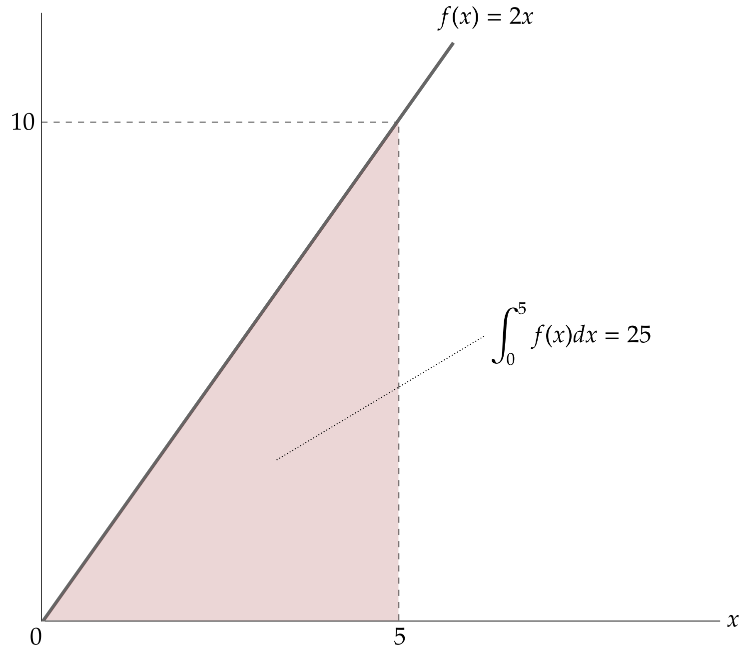

図 20: 関数 $f(x) = 2x$ の積分

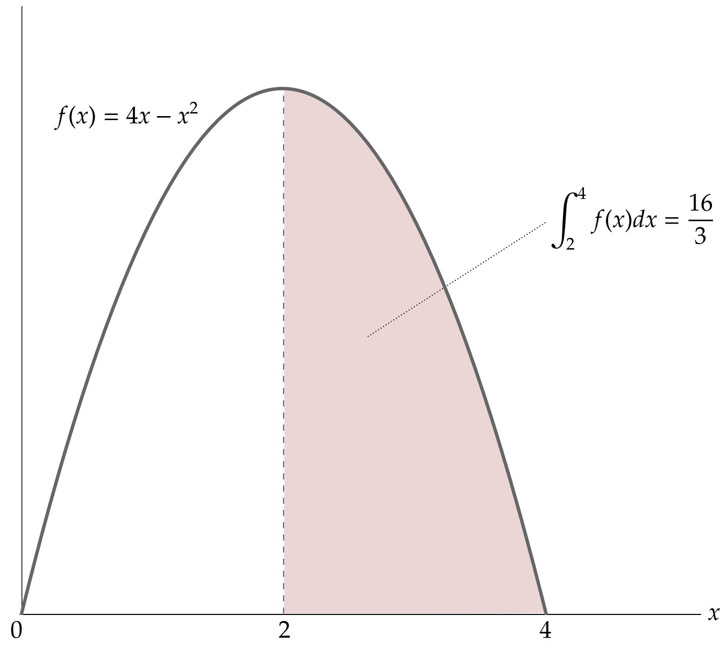

図 21: 関数 $f(x) = 4x - x^2$ の積分

5.2 積分区間の微分

関数 $f(x)$ の $[a,b]$ 区間における定積分の値を J と書こう．この J の値は，当然ながら，関数 $f(x)$ が積分される区間に依存する．例えば同じ $f(x)=2x$ という関数を積分するのであっても，それを $[0,5]$ 区間で積分するのか，あるいは $[2,9]$ 区間で積分するのかによって，積分の値は異なったものになる．つまり，J の値は積分の下限 a や上限 b の関数になる（つまり a や b の値に依存する）．この事実を強調するために

$$J(a,b) := \int_a^b f(x)dx$$

と書く．この $J(a,b)$ は a や b の関数であるから，

$$\frac{\partial}{\partial a}J(a,b) \quad \text{つまり} \quad \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx$$

であるとか，

$$\frac{\partial}{\partial b}J(a,b) \quad \text{つまり} \quad \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx$$

であるとかいった（偏）微分を考えることができる．$\partial J(a,b)/\partial a$ は，a の値を少しだけ大きくした場合（つまり積分区間の左端を少し狭めた場合）に積分の値がどのように変化するかを表す．一方の $\partial J(a,b)/\partial b$ は，b の値を少しだけ大きくした場合（つまり積分区間の右端を少し広げた場合）に積分の値がどのように変化するかを表す．この偏微分の値は，$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ として

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

のように計算できたことを思いだすと，

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = \frac{\partial}{\partial a}\left(F(b) - F(a)\right) = -F'(a) = -f(a) \tag{5.3}$$

のように計算できる．つまり，積分区間 $[a,b]$ の左端をほんの少しだけ狭めると，積分の値は（a の変化量あたりで）$f(a)$ だけ減少する．同様に，

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = \frac{\partial}{\partial b}\left(F(b) - F(a)\right) = F'(b) = f(b) \tag{5.4}$$

のように計算できるから，積分区間 $[a,b]$ の右端をほんの少しだけ広げると，積分の値は（b の変化量あたりで）$f(b)$ だけ増加する．積分区間の端を変化させれば関数のグラフの高さ分だけ面積が変化するので，直観的には図 22 から明らかな結果であろう．

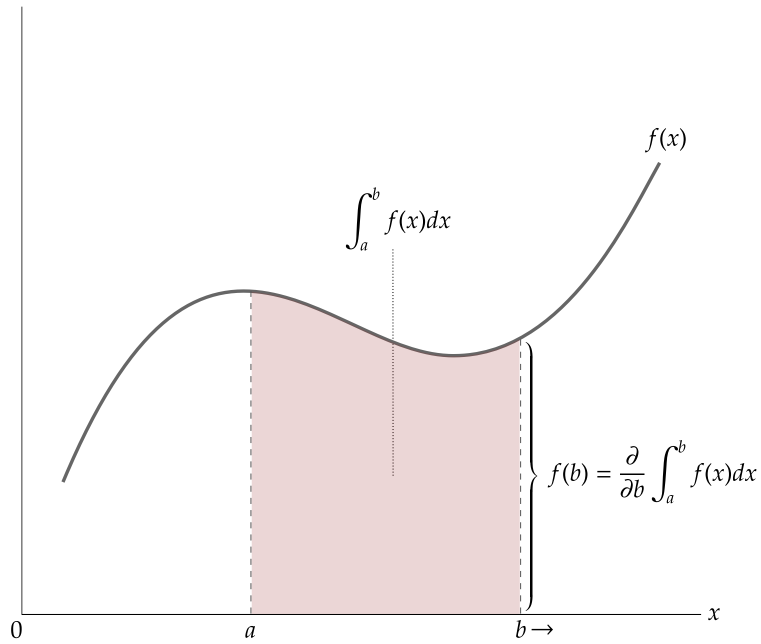

図 22: 積分区間に関する微分

この結果についても具体例を用いて確認しておこう．関数

$$f(x) := 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

の区間 $[a, b]$ 上での定積分を求める．この $f(x)$ の原始関数は

$$F(x) := x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

であったから，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = b^2 - a^2$$

である．したがって，

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = \frac{\partial}{\partial a}(b^2 - a^2) = -2a = -f(a)$$

かつ

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = \frac{\partial}{\partial b}(b^2 - a^2) = 2b = f(b)$$

であることが確認できる．別の例として，関数

$$f(x) := 4x - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

の区間 $[a, b]$ 上での定積分を求める．この場合には，$f(x)$ の原始関数は

$$F(x) := 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

であったから

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left(2b^2 - \frac{1}{3}b^3\right) - \left(2a^2 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

である．したがって，

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = -4a + a^2 = -f(a)$$

かつ

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = 4b - b^2 = f(b)$$

であることが確認できる．

A　演習問題

A.1　集合と関数

1. 以下で与えられる $\mathbb{R}$ の部分集合について，それぞれを実数直線上で図示しなさい．

   (a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1 \text{ and } x \leq 5\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, x < 5\}$

2. 以下で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合について，それぞれを 2 次元実数平面上で図示しなさい．

   (a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq -1 \text{ and } x_2 \geq -2\}$

   (b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \geq x_1 \geq -1 \text{ and } 2 \geq x_2 \geq -2\}$

   (c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_1 + x_2 = 1\}$

   (d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, 2x_1 + 3x_2 = 12\}$

3. 以下で与えられる方程式について，それぞれを x について解きなさい．

   (a) $1 + 2x = 0$

   (b) $1 - 4x + x^2 = -3$

   (c) $x^5 - 3 = 0$

   (d) $x^{2/3} = 2$

4. 以下で与えられる連立方程式（system of equations）について，それぞれを (x_1, x_2) について解きなさい．

   (a) $1 + 2x_1 + 3x_2 = 0$ および $x_1 + 3x_2 = 0$

   (b) $1 - 2x_1 + x_2^2 = 0$ および $x_1 - x_2 = 0$

   (c) $x_2/x_1 = 2/3$ および $2x_1 + 3x_2 = 12$

   (d) $(x_1 - 3)e^{x_1+x_2} = 0$ および $(x_2 - 2)e^{x_1+x_2} = 0$

5. 変数 x と変数 y が方程式

$$-3x + 15 = 5y \tag{A.1}$$

   を満たしているとする．

   (a) 方程式 (A.1) を y について解いて，$y = f(x)$ のような形にしなさい．

   (b) 方程式 (A.1) を x について解いて，$x = g(y)$ のような形にしなさい．

   (c) 関数 $f(x)$ と関数 $g(y)$ はどのような関係にあるか説明しなさい．

   (d) 縦軸に y，横軸に x をとり，$f(x)$ と $g(y)$ のグラフを描きなさい．

A.2 微分

1. 以下で与えられる 1 変数関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について，それぞれの微分係数を求めなさい．

   (a) $f(x) := 8$

   (b) $f(x) := 5 + x + 2x^3$

   (c) $f(x) := 3x^{2/3}$

   (d) $f(x) := x(12-4x)^2$

   (e) $f(x) := \left(x(12-4x)^2\right)^{1/3}$

   (f) $f(x) := e^{5x}$

   (g) $f(x) := \ln(2+x) + e^{x+3+x^4}$ （ただし $x > -2$ とする）

   (h) $f(x) := \ln((2+x)x^2)$ （ただし $x > -2$ かつ $x \neq 0$ とする）

2. 以下で与えられる 1 変数関数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ について，それぞれの微分係数 $f'(x)$ を求めなさい．ただし a は定数とする．

   (a) $f(x) := 2a$

   (b) $f(x) := 8x + 2a$

   (c) $f(x) := x^2 + 2a^{1/2}$

   (d) $f(x) := x^{1/4}a^{3/4}$

   (e) $f(x) := (x^{1/2} + a^{1/2})^2$

   (f) $f(x) := \ln(xa)$ （ただし $x > 0$ かつ $a > 0$ とする）

A.3 偏微分

1. 以下で与えられる 2 変数関数 $f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ について，それぞれの偏微分係数 $f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)$ を求めなさい．

   (a) $f(x_1,x_2) := 2x_2$

   (b) $f(x_1,x_2) := 8x_1 + 2x_2$

   (c) $f(x_1,x_2) := x_1^2 + 2x_2^{1/2}$

   (d) $f(x_1,x_2) := x_1^{1/4}x_2^{3/4}$

   (e) $f(x_1,x_2) := (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2$

   (f) $f(x_1,x_2) := \ln(x_1x_2)$ （ただし $x_1 > 0$ かつ $x_2 > 0$ とする）

2. 前の設問で与えられる 2 変数関数 $f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ について，偏微分係数の比 $f_1(x_1,x_2)/f_2(x_1,x_2)$ を求めなさい．

3. 2変数関数 $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, x_2) := x_1^{1/3} x_2^{2/3} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{A.2}$$

で定義し，次のような $\mathbb{R}^2_+$ の部分集合 $I \subset \mathbb{R}^2_+$ を考える：

$$I := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid f(x_1, x_2) = 16\}. \tag{A.3}$$

   (a) $f(x_1, x_2) = 16$ を満たす x_1 と x_2 の組を複数見つけて，それらを2次元実数平面上で結ぶことで I を図示しなさい.

   (b) 2次元実数平面上の I のグラフが，$x_2 = 64x_1^{-1/2}$ の描くグラフと一致することを確認しなさい.

   (c) $x_2 = 64x_1^{-1/2}$ の描く曲線について，$(x_1, x_2) = (1, 64)$, $(x_1, x_2) = (4, 32)$, $(x_1, x_2) = (16, 16)$ の各点における接線の傾きの絶対値を求めなさい.

   (d) 上の (A.2) で定義される2変数関数 $f(x_1, x_2)$ について，$(x_1, x_2) = (1, 64)$, $(x_1, x_2) = (4, 32)$, $(x_1, x_2) = (16, 16)$ の各点における偏微分係数の比 $f_1(x_1, x_2)/f_2(x_1, x_2)$ を求めなさい.

A.4 関数の最大化

1. 以下で与えられる1変数関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について，X 上で最大値を与える $x \in X$ を微分を用いずに求めなさい.

   (a) $f(x) := -(x-1)^2$，$X := \mathbb{R}$

   (b) $f(x) := -(x-1)(x-3)$，$X := \mathbb{R}$

   (c) $f(x) := e^{-x^2+4x-3}$，$X := \mathbb{R}$

   (d) $f(x) := x^{1/2}(12-2x)^{1/2}$，$X := [0, 6]$

2. 上の設問で与えられる1変数関数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ について，$\mathbb{R}_+$ 上で最大値を与える $x \in \mathbb{R}_+$ を定理1を用いて求めなさい.

3. 以下で与えられる2変数関数 $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ について，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上で最大値を与える $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ を（可能であれば偏微分を用いずに）求めなさい.

   (a) $f(x_1, x_2) := 2 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$

   (b) $f(x_1, x_2) := e^{2-(x_1-1)^2-(x_2-2)^2}$

   (c) $f(x_1, x_2) := 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} - 8x_1 - x_2$ （*これは少し難しいので解けなくても大丈夫です）

4. 上の設問で与えられる2変数関数 $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ について，$\mathbb{R}^2_+$ 上で最大値を与える $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ を定理2を用いて求めなさい.

5. 2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, x_2) := x_1^{1/3} x_2^{2/3} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{A.4}$$

で定義し，次のような $\mathbb{R}^2_+$ の部分集合 $S \subset \mathbb{R}^2_+$ を考える：

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 4x_1 + x_2 = 12\}. \tag{A.5}$$

(a) S を 2 次元実数平面上に図示しなさい．

(b) 2 次元実数平面上の S のグラフが，$x_2 = 12 - 4x_1$ の描くグラフと一致することを確認しなさい．

(c) 上の (A.4) で定義される 2 変数関数に $x_2 = 12 - 4x_1$ を代入すると

$$f(x_1, 12 - 4x_1) := x_1^{1/3}(12 - 4x_1)^{2/3} = \left(x_1(12 - 4x_1)^2\right)^{1/3} \tag{A.6}$$

のような x_1 のみを変数とする 1 変数関数を得る．まず，$f(x_1, 12 - 4x_1)$ を図示しなさい．次に，開区間 $(0, 3) \subset \mathbb{R}_+$ 上で $f(x_1, 12 - 4x_1)$ を最大にする $x_1 \in (0, 3)$ を定理 1 を用いて求めなさい．

(d) 上の (A.4) で定義される 2 変数関数 f について，S 上で f の最大値を与える $(x_1, x_2) \in S$ を定理 3 を用いて求めなさい．

A.5 積分

1. 以下で与えられる 1 変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と区間 $[a, b]$ について，積分値 $\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい．

   (a) $f(x) := 2 + 8x$，$[a, b] := [0, 2]$

   (b) $f(x) := 4 - x$，$[a, b] := [2, 4]$

   (c) $f(x) := x^{-1/2}$，$[a, b] := [0, 4]$

   (d) $f(x) := 10x - x^2$，$X := [3, 9]$

2. 以下で与えられる 1 変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と区間 $[a, b]$ について，

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x)dx \quad \text{および} \quad \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x)dx$$

   を求めなさい．

   (a) $f(x) := 4 + 5x$，$[a, b] := [0, 1]$

   (b) $f(x) := 10x - x^{1/2}$，$[a, b] := [4, 9]$

   (c) $f(x) := e^{-x^2 + 4x - 3}$，$[a, b] := [1, 2]$

B　演習問題の解答

B.1　集合と関数

1. 省略.

2. 省略.

3. 以下のように式を変形すればよい.

   (a) $1+2x=0$ を変形して

   $$1+2x=0 \iff x=-1/2 \tag{B.1}$$

   (b) $1-4x+x^2=-3$ を変形して

   $$\begin{aligned} 1-4x+x^2=-3 &\iff (x-2)^2=0 \\ &\iff x=2 \end{aligned} \tag{B.2}$$

   (c) $x^5-3=0$ を変形して

   $$x^5=3 \iff x=3^{1/5} \tag{B.3}$$

   (d) $x^{2/3}=2$ を変形して

   $$x^{2/3}=2 \iff x=2^{3/2} \tag{B.4}$$

4. 与えられた二つの式を同時に満たす (x_1,x_2) を探せばよい.

   (a) まず $x_1+3x_2=0$ から

   $$3x_2=-x_1 \tag{B.5}$$

   と書けるから，これを $1+2x_1+3x_2=0$ と合わせて

   $$1+2x_1-x_1=0 \iff x_1=-1 \tag{B.6}$$

   である．そして，いま求めた $x_1=-1$ を (B.5) に代入すれば

   $$3x_2=1 \iff x_2=1/3 \tag{B.7}$$

   となる．よって，与えられた連立方程式の解は $(x_1,x_2)=(-1,1/3)$ である.

(b) まず $x_1 - x_2 = 0$ から

$$x_2 = x_1 \tag{B.8}$$

であるから，これを $1 - 2x_1 + x_2^2 = 0$ と合わせて

$$1 - 2x_1 + x_1^2 = 0 \iff (x_1 - 1)^2 = 0 \iff x_1 = 1 \tag{B.9}$$

となる．そして，いま求めた $x_1 = 1$ を (B.8) に代入すれば，

$$x_2 = 1 \tag{B.10}$$

を得る．よって，与えられた連立方程式の解は $(x_1, x_2) = (1, 1)$ である．

(c) まず $x_2/x_1 = 2/3$ から

$$x_2/x_1 = 2/3 \iff 3x_2 = 2x_1 \tag{B.11}$$

である．したがって，これを $2x_1 + 3x_2 = 12$ と合わせれば

$$2x_1 + 2x_1 = 12 \iff x_1 = 3 \tag{B.12}$$

となる．そして，いま求めた $x_1 = 3$ を (B.11) に代入すれば

$$3x_2 = 6 \iff x_2 = 2 \tag{B.13}$$

を得る．よって，与えられた連立方程式の解は $(x_1, x_2) = (3, 2)$ である．

(d) まず $(x_1 - 3)e^{x_1 + x_2} = 0$ から

$$(x_1 - 3)e^{x_1 + x_2} = 0 \iff x_1 = 3 \tag{B.14}$$

である．なお，この書き換えには指数関数の特徴である

$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{B.15}$$

という事実を用いている．同様にして，$(x_2 - 2)e^{x_1 + x_2} = 0$ から

$$(x_2 - 2)e^{x_1 + x_2} = 0 \iff x_2 = 2 \tag{B.16}$$

である．よって，与えられた連立方程式の解は $(x_1, x_2) = (3, 2)$ である．

5. 同じ方程式を異なる二つの変数に関して解いたものが違いに逆関数になることを確認する．

(a) 方程式 (A.1) を y について解くと

$$-3x + 15 = 5y \iff y = -\frac{3}{5}x + 3 =: f(x)$$

である．

(b) 方程式 (A.1) を x について解くと

$$-3x + 15 = 5y \iff x = -\frac{5}{3}y - 5 =: g(y)$$

である．

6. 関数 $f(x)$ と関数 $g(y)$ は，

$$f(g(y)) = -\frac{3}{5}g(y) + 3 = -\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{3}y - 5\right) + 3 = y$$

かつ

$$g(f(x)) = -\frac{5}{3}f(x) - 5 = -\frac{5}{3}\left(-\frac{3}{5}x + 3\right) - 5 = x$$

を満たすから，互いに逆関数の関係にある．

B.2 微分

1. 微分の公式を組み合わせればよい．

(a) 定数関数の微分係数は 0 だから

$$f'(x) = (8)' = 0 \tag{B.17}$$

である．

(b) 冪関数の微分の公式と和の公式，および積の公式を合わせて

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5 + x + 2x^3)' \\ &= (5)' + (x)' + (2x^3)' \\ &= 0 + 1x^0 + (2)'x^3 + 2(x^3)' \\ &= 1 + 0x^3 + 2(3x^2) \\ &= 1 + 6x^2 \end{aligned} \tag{B.18}$$

である．

(c) 冪関数の微分の公式と積の公式から

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^{2/3})' \\ &= (3)'x^{2/3} + 3(x^{2/3})' \\ &= 0x^{2/3} + 3(2/3)x^{2/3-1} \\ &= 2x^{-1/3} \end{aligned} \tag{B.19}$$

である．

(d) まず積の公式から

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x(12-4x)^2)' \\ &= (x)'(12-4x)^2 + x((12-4x)^2)' \\ &= (12-4x)^2 + x((12-4x)^2)' \end{aligned} \tag{B.20}$$

である．さらに，連鎖律により

$$\begin{aligned} ((12-4x)^2)' &= 2(12-4x)^{2-1}(12-4x)' \\ &= -8(12-4x) \end{aligned} \tag{B.21}$$

であるから，これを (B.20) に代入して

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12-4x)^2 - 8x(12-4x) \\ &= (12-4x)(12-12x) \\ &= 12(12-4x)(1-x) \end{aligned} \tag{B.22}$$

を得る．

(e) 連鎖律により

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x(12-4x)^2)^{1/3}\right)' \\ &= (1/3)(x(12-4x)^2)^{-2/3}\left(x(12-4x)^2\right)' \\ &= (1/3)x^{-2/3}(12-4x)^{-4/3}\left(x(12-4x)^2\right)' \end{aligned} \tag{B.23}$$

である．直前の設問により，

$$\left(x(12-4x)^2\right)' = 12(12-4x)(1-x) \tag{B.24}$$

であったから，これを (B.23) に代入することで

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1/3)x^{-2/3}(12-4x)^{-4/3}12(12-4x)(1-x) \\ &= 4x^{-2/3}(12-4x)^{-1/3}(1-x) \end{aligned} \tag{B.25}$$

を得る．

(f) 指数関数の微分の公式と連鎖律から

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{5x})' \\ &= e^{5x}(5x)' \\ &= 5e^{5x} \end{aligned} \tag{B.26}$$

である．

(g) 対数関数の微分の公式と連鎖律から

$$\begin{aligned} (\ln(2+x))' &= \frac{1}{2+x}(2+x)' \\ &= \frac{1}{2+x} \end{aligned} \tag{B.27}$$

である．一方，指数関数の微分の公式と連鎖律から

$$\begin{aligned} (e^{x+3+x^4})' &= e^{x+3+x^4}(x+3+x^4)' \\ &= e^{x+3+x^4}(1+4x^3) \end{aligned} \tag{B.28}$$

である．よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\ln(2+x) + e^{x+3+x^4}\Big)' \\ &= (\ln(2+x))' + \Big(e^{x+3+x^4}\Big)' \\ &= \frac{1}{2+x} + e^{x+3+x^4}(1+4x^3) \end{aligned} \tag{B.29}$$

を得る．

(h) まず，対数関数の性質により

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln((2+x)x^2) \\ &= \ln(2+x) + \ln(x^2) \\ &= \ln(2+x) + 2\ln(x) \end{aligned} \tag{B.30}$$

と書けることに注意する．したがって

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\ln(2+x))' + (2\ln(x))' \\
&= \frac{1}{2+x} + \frac{2}{x} \qquad \text{(B.31)}
\end{aligned}
$$

である．

2. これも，微分の公式を組み合わせればよい．

(a) 積の公式により

$$
(2a)' = (2)'a + 2(a)' = 0 \times a + 2 \times 0 = 0 \qquad \text{(B.32)}
$$

(b) 和の公式と積の公式により

$$
\begin{aligned}
(8x + 2a)' &= (8x)' + (2a)' \\
&= (8)'x + 8(x)' + (2)'a + 2(a)' \\
&= 0 \times x + 8 \times 1 + 0 \times a + 2 \times 0 \\
&= 8 \qquad \text{(B.33)}
\end{aligned}
$$

(c) 和の公式とべき関数の微分の公式により

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2a^{1/2})' &= (x^2)' + (2a^{1/2})' \\
&= 2x^{2-1} + 0 \\
&= 2x \qquad \text{(B.34)}
\end{aligned}
$$

(d) 積の公式とべき関数の微分の公式により

$$
\begin{aligned}
(x^{1/4}a^{3/4})' &= (x^{1/4})'a^{3/4} + x^{1/4}(a^{3/4})' \\
&= \frac{1}{4}x^{1/4-1} \times a^{3/4} + x^{1/4} \times 0 \\
&= \frac{1}{4}x^{-3/4}a^{3/4} \qquad \text{(B.35)}
\end{aligned}
$$

(e) 連鎖律，べき関数の微分の公式，和の公式により

$$
\begin{aligned}
((x^{1/2}+a^{1/2})^2)' &= 2(x^{1/2}+a^{1/2})^{2-1}(x^{1/2}+a^{1/2})' \\
&= 2(x^{1/2}+a^{1/2})((x^{1/2})'+(a^{1/2})') \\
&= 2(x^{1/2}+a^{1/2})\left(\frac{1}{2}x^{1/2-1}+0\right) \\
&= (x^{1/2}+a^{1/2})x^{-1/2}a
\end{aligned}
\tag{B.36}
$$

(f) 連鎖律，指数関数の微分の公式，積の公式により

$$
\begin{aligned}
(\ln(xa))' &= \frac{1}{xa}(xa)' \\
&= \frac{1}{xa}\left((x)'a+x(a)'\right) \\
&= \frac{1}{xa}(1\times a+x\times 0) \\
&= \frac{1}{xa}a \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
\tag{B.37}
$$

B.3 偏微分

1. 当該変数以外の変数を定数と見なして微分係数を求めればよい．

(a) まず x_1 に関する偏微分係数を求めるには，$2x_2$ を定数と見なして x_1 に関する微分係数を求めればよい．すると，定数関数の微分係数は 0 であることから

$$f_1(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}\{2x_2\}=0 \tag{B.38}$$

である．一方，x_2 に関する偏微分係数は，

$$f_2(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}\{2x_2\}=2 \tag{B.39}$$

となる．

(b) まず x_1 に関する偏微分係数は，$2x_2$ の部分を定数と見なすことにより

$$f_1(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}\{8x_1+2x_2\}=8+0=8 \tag{B.40}$$

のように計算できる．一方，x_2 に関する偏微分係数は，同様に $8x_1$ の

部分を定数と見なすことにより

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\{8x_1 + 2x_2\} = 0 + 2 = 2 \tag{B.41}$$

となる．

(c) まず x_1 に関する偏微分係数は，$2x_2^{1/2}$ の部分を定数と見なすことにより

$$f_1(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{x_1^2 + 2x_2^{1/2}\right\} = 2x_1 + 0 = 2x_1 \tag{B.42}$$

のように計算できる．一方，x_2 に関する偏微分係数は，やはり x_1^2 の部分を定数と見なすことにより

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_1^2 + 2x_2^{1/2}\right\} = 0 + 2\cdot(1/2)x_2^{-1/2} = x_2^{-1/2} \tag{B.43}$$

である．

(d) まず x_1 に関する偏微分係数は，$x_2^{3/4}$ の部分を定数と見なすことにより

$$f_1(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{x_1^{1/4}x_2^{3/4}\right\} = \frac{1}{4}x_1^{-3/4}x_2^{3/4} = \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-3/4} \tag{B.44}$$

のように計算できる．一方，$x_1^{1/4}$ の部分を定数と見なせば，x_2 に関する偏微分係数

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_1^{1/4}x_2^{3/4}\right\} = \frac{3}{4}x_1^{1/4}x_2^{-1/4} = \frac{3}{4}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/4} \tag{B.45}$$

を得る．

(e) まず x_1 に関する偏微分係数は，$x_2^{1/2}$ の部分を定数と見なすことにより

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2\right\} \\ &= 2(x_1^{1/2} + x_2^{1/2})\frac{d}{dx_1}\left\{x_1^{1/2}\right\} \\ &= (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})x_1^{-1/2} \end{aligned} \tag{B.46}$$

のである．一方，x_2 に関する偏微分係数は，$x_1^{1/2}$ の部分を定数と見な

すことにより

$$
\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{(x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2\right\} \\
&= 2(x_1^{1/2} + x_2^{1/2})\frac{d}{dx_2}\left\{x_2^{1/2}\right\} \\
&= (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})x_2^{-1/2} \qquad \text{(B.47)}
\end{aligned}
$$

のように計算できる．

(f) まず x_1 に関する偏微分係数は，x_2 を定数と見なすことにより

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\{\ln(x_1x_2)\} \\
&= \frac{1}{x_1x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\{x_1x_2\} \\
&= \frac{1}{x_1x_2}x_2 \\
&= \frac{1}{x_1} \qquad \text{(B.48)}
\end{aligned}
$$

である．一方 x_2 に関する偏微分係数は，x_1 を定数と見なすことにより

$$
\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\{\ln(x_1x_2)\} \\
&= \frac{1}{x_1x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\{x_1x_2\} \\
&= \frac{1}{x_1x_2}x_1 \\
&= \frac{1}{x_2} \qquad \text{(B.49)}
\end{aligned}
$$

となる．

2. 前の設問の結果をそのまま用いればよい．

(a) (B.38) と (B.39) を用いれば

$$\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \frac{0}{2} = 0. \qquad \text{(B.50)}$$

(b) (B.40) と (B.41) を用いれば

$$\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \frac{8}{2} = 4. \qquad \text{(B.51)}$$

(c) (B.42) と (B.43) を用いれば

$$\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = \frac{2x_1}{x_2^{-1/2}} = 2x_1x_2^{1/2}. \tag{B.52}$$

(d) (B.44) と (B.45) を用いれば

$$\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-3/4}}{\frac{3}{4}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/4}} = \frac{1}{3}\frac{x_2}{x_1}. \tag{B.53}$$

(e) (B.46) と (B.47) を用いれば

$$\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = \frac{(x_1^{1/2}+x_2^{1/2})x_1^{-1/2}}{(x_1^{1/2}+x_2^{1/2})x_2^{-1/2}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-1/2}. \tag{B.54}$$

(f) (B.48) と (B.49) を用いれば

$$\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1}. \tag{B.55}$$

3. 等高線の傾きを 2 通りの方法で求める.

(a) たとえば，$(x_1,x_2)=(1,64)$, $(x_1,x_2)=(4,32)$, $(x_1,x_2)=(16,16)$ などを曲線で結べば良い.

(b) 省略.

(c) $x_2 = 64x_1^{-1/2}$ を x_1 について微分すると，

$$\left(64x_1^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}64x_1^{-3/2} = -32x_1^{-3/2} \tag{B.56}$$

であるから，$(x_1,x_2)=(1,64)$, $(x_1,x_2)=(4,32)$, $(x_1,x_2)=(16,16)$ の各点における接線の傾きは，それぞれ

$$\left(64x_1^{-1/2}\right)'\Big|_{x_1=1} = -32\cdot 1^{-3/2} = -32, \tag{B.57}$$

$$\left(64x_1^{-1/2}\right)'\Big|_{x_1=4} = -32\cdot 4^{-3/2} = -4, \tag{B.58}$$

$$\left(64x_1^{-1/2}\right)'\Big|_{x_1=16} = -32\cdot 16^{-3/2} = -\frac{1}{2}, \tag{B.59}$$

である.

(d) 偏微分係数の比 $f_1(x_1, x_2)/f_2(x_1, x_2)$ は

$$\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \frac{\frac{1}{3}x_1^{1/3}x_2^{2/3}x_1^{-1}}{\frac{2}{3}x_1^{1/3}x_2^{2/3}x_2^{-1}} = \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} \tag{B.60}$$

であるから，これを $(x_1, x_2) = (1, 64)$, $(x_1, x_2) = (4, 32)$, $(x_1, x_2) = (16, 16)$ の各点で評価すると，それぞれ

$$\left.\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}\right|_{(x_1,x_2)=(1,64)} = \frac{1}{2}\frac{64}{1} = 32, \tag{B.61}$$

$$\left.\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}\right|_{(x_1,x_2)=(4,32)} = \frac{1}{2}\frac{32}{4} = 4, \tag{B.62}$$

$$\left.\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}\right|_{(x_1,x_2)=(16,16)} = \frac{1}{2}\frac{16}{16} = \frac{1}{2}, \tag{B.63}$$

である．

B.4 関数の最大化

1. 関数 $f(x)$ の式を適当に変形すればよい．

(a) $f(x) := -(x-1)^2$ は

$$f(x) \leq 0 = -(1-1)^2 = f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{B.64}$$

を満たすから，$f(x)$ は $x = 1$ で最大値をとる．

(b) $f(x) := -(x-1)(x-3)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-2+1)(x-2-1) \\ &= -(x-2)^2 + 1 \\ &\leq 1 \\ &= f(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{B.65}$$

を満たすから，$f(x)$ は $x = 2$ で最大値をとる．

(c) $f(x) := e^{-x^2+4x-3}$ は，指数関数が単調増加関数であることに注意す

れば，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-(x-2)^2+1} \\
&\leq e^1 \\
&= f(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{B.66}
$$

を満たすことが分かるから，$f(x)$ は $x=2$ で最大値をとる．

(d) $f(x) := x^{1/2}(12-2x)^{1/2}$ は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x(12-2x))^{1/2} \\
&= \left(18-2(x-3)^2\right)^{1/2} \\
&\leq 18^{1/2} \\
&= f(3) \quad \forall x \in [0,6]
\end{aligned}
\tag{B.67}
$$

を満たすことが分かるから，$f(x)$ は $x=3$ で最大値をとる．

2. 関数のそれぞれについて，$f'(x^*)=0$ を満たす x^* を求めれば良い．

(a) $f(x) := -(x-1)^2$ については

$$
f'(x^*) = 0 \iff -2(x^*-1) = 0 \iff x^* = 1 \tag{B.68}
$$

であるから，$f(x)$ は $x=1$ で最大値をとる．

(b) $f(x) := -(x-1)(x-3)$ については

$$
\begin{aligned}
f'(x^*) = 0 &\iff -(x^*-3)-(x^*-1) = 0 \\
&\iff x^* = 2
\end{aligned}
\tag{B.69}
$$

を満たすから，$f(x)$ は $x=2$ で最大値をとる．

(c) $f(x) := e^{-x^2+4x-3}$ については，

$$
\begin{aligned}
f'(x^*) = 0 &\iff e^{-(x^*)^2+4x^*-3}(-2x^*+4) = 0 \\
&\iff x^* = 2
\end{aligned}
\tag{B.70}
$$

を満たすことが分かるから，$f(x)$ は $x=2$ で最大値をとる．

(d) $f(x) := x^{1/2}(12-2x)^{1/2}$ については，

$$\begin{aligned} f'(x^*) = 0 &\iff \frac{1}{2}(x^*)^{-1/2}(12-2x^*)^{1/2} - \frac{1}{2}(x^*)^{1/2}(12-2x^*)^{-1/2}2 = 0 \\ &\iff 12 - 2x^* = 2x^* \\ &\iff x^* = 3 \end{aligned} \tag{B.71}$$

を満たすことが分かるから，$f(x)$ は $x=3$ で最大値をとる．

3. 関数 $f(x_1, x_2)$ の式を適当に変形すればよい．

(a) $f(x_1, x_2) := 2 - (x_1-1)^2 - (x_2-2)^2$ は

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &\leq 2 \\ &= 2 - (1-1)^2 - (2-2)^2 \\ &= f(1,2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \end{aligned} \tag{B.72}$$

を満たすから，$f(x_1, x_2)$ は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ で最大となる．

(b) $f(x_1, x_2) := e^{2-(x_1-1)^2-(x_2-2)^2}$ は，指数関数が増加関数であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &\leq e^2 \\ &= e^{2-(1-1)^2-(2-2)^2} \\ &= f(1,2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \end{aligned} \tag{B.73}$$

を満たすから，$f(x_1, x_2)$ は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ で最大となる．

(c) 少し工夫が必要である．まず，$f(x_1, x_2) := 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} - 8x_1 - x_2$ が

$$f(x_1, x_2) = (8x_1)^{1/3}x_2^{1/3} - 8x_1 - x_2 \tag{B.74}$$

と書き換えられることに注意しよう．すると，右辺において $8x_1$ と x_2 は完全に対称であるから，$f(x_1, x_2)$ を最大にする点においては，$8x_1 = x_2$ が成立しているはずだという見当がつく．実際，任意の (x_1, x_2) について

$$x_1' := \frac{1}{8}\frac{8x_1 + x_2}{2}, \quad x_2' := \frac{8x_1 + x_2}{2} \tag{B.75}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= (8x_1)^{1/3}x_2^{1/3} - 8x_1 - x_2 \\
&= \left(\left(\frac{8x_1+x_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(8x_1-x_2)^2\right)^{1/3} - 8x_1 - x_2 \\
&\leq \left(\frac{8x_1+x_2}{2}\right)^{2/3} - 8x_1 - x_2 \qquad \text{(B.76)} \\
&= \left(\frac{8x_1+x_2}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{8x_1+x_2}{2}\right)^{1/3} - \frac{8x_1+x_2}{2} - \frac{8x_1+x_2}{2} \\
&= \left(8x_1'\right)^{1/3}\left(x_2'\right)^{1/3} - 8x_1' - x_2' \\
&= f\left(x_1', x_2'\right) \qquad \text{(B.77)}
\end{aligned}$$

が成立する．とくに，(B.76) の不等号が等号で成立するのは，$8x_1 = x_2$ のとき，そしてその時のみである．これは，$8x_1 \neq x_2$ である限り，関数 $f(x_1,x_2)$ の値は最大になり得ないことを意味する．x_1' と x_2' とを (B.75) のように定義すれば，関数 $f(x_1,x_2) < f(x_1',x_2')$ が成立するからである．つまり，

$$f(x_1,x_2) \leq f(x_1, 8x_1) \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \qquad \text{(B.78)}$$

であり，したがって

$$g(x_1) := f(x_1, 8x_1) = 4x_1^{2/3} - 16x_1 \qquad \text{(B.79)}$$

を最大にする x_1 を探せばよい．$g(x_1)$ は 1 変数関数なので，定理 1 を用いることができる．すなわち

$$g'(x_1) = 0 \iff x_1 = 6^{-3} \qquad \text{(B.80)}$$

であるから，関数 $g(x_1)$ の値は $x_1 = 6^{-3}$ で最大となる．以上から $f(x_1,x_2)$ は $(x_1,x_2) = (x_1, 8x_1) = (6^{-3}, 8\cdot 6^{-3})$ で最大となる．

4. 関数のそれぞれについて，$f_1(x_1^*,x_2^*) = f_2(x_1^*,x_2^*) = 0$ を満たす (x_1^*,x_2^*) を求めれば良い．

(a) $f(x_1,x_2) := 2 - (x_1-1)^2 - (x_2-2)^2$ については

$$f_1(x_1^*,x_2^*) = -2(x_1^*-1) = 0 \iff x_1^* = 1 \qquad \text{(B.81)}$$

$$f_2(x_1^*,x_2^*) = -2(x_2^*-2) = 0 \iff x_2^* = 2 \qquad \text{(B.82)}$$

であるから，$f(x_1,x_2)$ は $(x_1,x_2)=(1,2)$ で最大となる．

(b) $f(x_1,x_2):=e^{2-(x_1-1)^2-(x_2-2)^2}$ については

$$f_1(x_1^*,x_2^*)=-2(x_1^*-1)e^{2-(x_1^*-1)^2-(x_2^*-2)^2}=0 \iff x_1^*=1 \tag{B.83}$$

$$f_2(x_1^*,x_2^*)=-2(x_2^*-2)e^{2-(x_1^*-1)^2-(x_2^*-2)^2}=0 \iff x_2^*=2 \tag{B.84}$$

であるから，$f(x_1,x_2)$ は $(x_1,x_2)=(1,2)$ で最大となる．

(c) $f(x_1,x_2):=2x_1^{1/3}x_2^{1/3}-8x_1-x_2$ については

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*,x_2^*)&=\frac{2}{3}(x_1^*)^{-2/3}(x_2^*)^{1/3}-8=0 \\ \iff (x_1^*)^{-2/3}(x_2^*)^{1/3}&=12 \end{aligned} \tag{B.85}$$

かつ

$$\begin{aligned} f_2(x_1^*,x_2^*)&=\frac{2}{3}(x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{-2/3}-1=0 \\ \iff (x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{-2/3}&=\frac{3}{2} \end{aligned} \tag{B.86}$$

であるから，(B.85) と (B.86) とを合わせれば，まず x_1^* と x_2^* は

$$\frac{x_2^*}{x_1^*}=8 \iff x_2^*=8x_1^* \tag{B.87}$$

を満たしていなければならないことが分かる．これを (B.85) に代入すれば

$$(x_1^*)^{-2/3}2(x_1^*)^{1/3}=12 \iff x_1^*=6^{-3} \tag{B.88}$$

が得られ，したがって $x_2^*=8x_1^*=8\cdot 6^{-3}$ である．以上から $f(x_1,x_2)$ は $(x_1,x_2)=(x_1,8x_1)=(6^{-3},8\cdot 6^{-3})$ で最大となる．

5. (a) 省略.

(b) 省略.

(c) まず，冪関数 $z^{1/3}$ は z について増加関数なので，

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax} f(x_1,12-4x_1)&=\operatorname{argmax}\left(x_1(12-4x_1)^2\right)^{1/3} \\ &=\operatorname{argmax} x_1(12-4x_1)^2 \end{aligned} \tag{B.89}$$

であることに注意する．つまり，$f(x_1,12-4x_1)$ を最大にする x_1 は，$x_1(12-4x_1)^2$ も最大にするしたがって，$x_1(12-4x_1)^2$ を最大にする x_1

を見つければ良い．いま，

$$\begin{aligned}\left\{x_1(12-4x_1)^2\right\}'=0 &\iff (12-4x_1)^2-x_1 2(12-4x_1)4=0\\ &\iff x_1=1 \qquad \text{(B.90)}\end{aligned}$$

であるから，定理 1 から，$f(x_1, 12-4x_1)$ は $x_1=1$ で最大となる．

(d) S 上で関数 $f(x_1,x_2)$ が $(x_1^*,x_2^*)\in S$ において最大化されているとすると，定理 3 から，

$$\begin{aligned}\frac{f_1(x_1^*,x_2^*)}{f_2(x_1^*,x_2^*)}=4 &\iff \frac{1}{2}\frac{x_2^*}{x_1^*}=4\\ &\iff x_2^*=8x_1^* \qquad \text{(B.91)}\end{aligned}$$

かつ

$$(x_1^*,x_2^*)\in S \iff 4x_1^*+x_2^*=12 \qquad \text{(B.92)}$$

を満たしているはずである．これを連立して解くと，$x_1^*=1$ および $x_2^*=8$ を得る．したがって，S 上で関数 $f(x_1,x_2)$ を最大化するのは $(x_1,x_2)=(1,8)$ である．

B.5 積分

1. 原始関数を見つけた上で (5.2) を用いて計算すればよい．

(a) $f(x):=2+8x$ の原始関数は

$$F(x):=2x+4x^2$$

であるから，$f(x)$ の $[0,2]$ 区間での定積分は

$$\int_0^2 f(x)=F(2)-F(0)=20-0=20$$

である．

(b) $f(x):=4-x$ の原始関数は

$$F(x):=4x-\frac{1}{2}x^2$$

であるから，$f(x)$ の $[2,4]$ 区間での定積分は

$$\int_2^4 f(x)=F(4)-F(2)=8-6=2$$

である．

(c) $f(x) := x^{-1/2}$ の原始関数は $F(x) := 2x^{1/2}$ であるから，$f(x)$ の $[0, 4]$ 区間での定積分は

$$\int_0^4 f(x) = F(4) - F(0) = 4 - 0 = 4$$

である．

(d) $f(x) := 10x - x^2$ の原始関数は

$$F(x) := 5x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

であるから，$f(x)$ の $[3, 9]$ 区間での定積分は

$$\int_3^9 f(x) = F(9) - F(3) = 162 - 36 = 126$$

である．

2. (5.3) と (5.4) を用いればよい．

(a) $f(x) := 4 + 5x$，$[a, b] := [0, 1]$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = -f(a) = -4 - 5a = -4$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = f(b) = 4 + 5b = 9$$

(b) $f(x) := 10x - x^{1/2}$，$[a, b] := [4, 9]$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = -f(a) = -10a + a^{1/2} = -40 + 2 = -38$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = f(b) = 10b - b^{1/2} = 90 - 3 = 87$$

(c) $f(x) := e^{-x^2+4x-3}$，$[a, b] := [1, 2]$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = -f(a) = -e^{-a^2+4a-3} = -e^0 = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = f(b) = e^{-b^2+4b-3} = e^{-4+8-3} = e$$

C　付録：合成関数とその微分

C.1　関数の評価

関数に特定のインプットを与えてアウトプットを得ることを，その関数を評価する（evaluate）と言う．例えば，$f: X \to Y$ という関数を考えよう．この関数 $f(x)$ に特定の要素 $\bar{x} \in X$ を与えて $f(\bar{x}) \in Y$ という値を得ることを「$f(x)$ を $\bar{x}$ で評価する」と言う．また，関数 $f(x)$ を特定の点 $x = \bar{x}$ で評価しているということを明示的に示すために，$f(\bar{x})$ の代わりに $f(x)\big|_{x=\bar{x}}$ と書いたりする．つまり

$$f(x)\big|_{x=\bar{x}} := f(\bar{x}) \tag{C.1}$$

である．これは単なる表記の約束であり，とくに難しい話ではない．同様に，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ についても，

$$f'(x)\big|_{x=\bar{x}} := f'(\bar{x}) \tag{C.2}$$

あるいは

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} := f'(\bar{x}) \tag{C.3}$$

などと書く．左辺のようにややこしい書き方をするのではなく，素直に右辺のように書けば良いではないか，という感想はもっともである．しかしながら，例えば以下で説明する合成関数の微分を考える中で，場合によってはこのような表記が必要とされるということが理解されよう．

C.2　合成関数

2 つの 1 変数関数 $g: X \to Y$ と $f: Y \to Z$ を考えよう．図 23 に示したように，g は X の要素 $x \in X$ を Y の要素 $g(x) \in Y$ に結びつけるものである．一方，f は Y の要素 $y \in Y$ を Z の要素 $f(y) \in Z$ に結びつけるものである．

ここで，$g(x)$ は Y に含まれる要素であるから，f を使ってそれをさらに Z の要素に結びつけることができる，ということに注意する．つまり，$f(y)$ の y に $g(x)$ を代入すれば，Z の要素 $f(g(x))$ を得る．これは言い換えれば，g と f とを組み合わせることで，X の要素 $x \in X$ を Z の要素 $f(g(x)) \in Z$ に結びつける関数を新たに定義できるということである．そのような関数を合成関数と呼び，しばしば $f \circ g: X \to Z$ のように書く．

具体的なイメージをつかむために，次のような例を考えよう．x を夏の日の平均気温として，その日の電力需要量を y で表わそう．また，電力需要量 y と気温 x との間には

$$y = \underbrace{1 + 2x}_{=:g(x)} \tag{C.4}$$

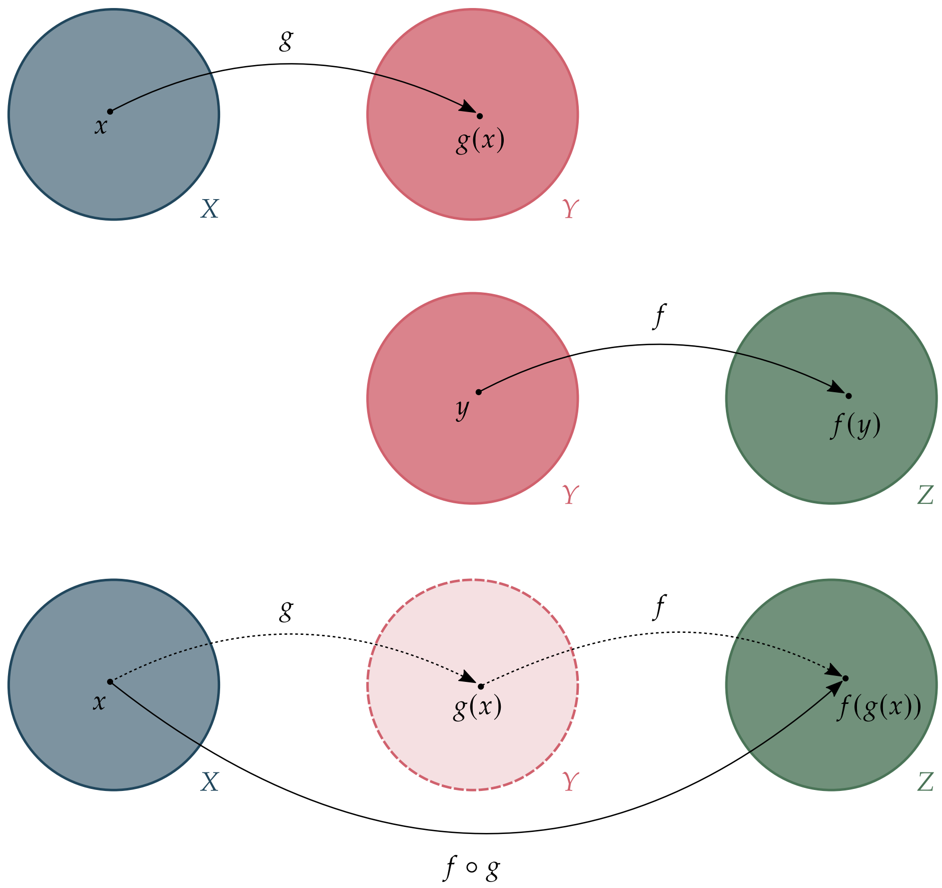

図 23: 関数 $g: X \to Y$ と関数 $g: Y \to Z$ との合成関数 $f \circ g: X \to Z$

のような関係があるとする．一方，発電には化石燃料が必要であり，化石燃料の消費量 z と電力需要量 y との関係が

$$z = \underbrace{10 + y^{3/2}}_{=:f(y)} \tag{C.5}$$

のような式によって表現できるとしよう．電力需要が少ないときには，効率的な発電方法だけを用いればよいので，化石燃料の消費量は少なくて済む．電力需要が高まるにつれて，効率的でない発電方法にも頼らざるを得なくなり，追加的な発電に必要とされる化石燃料の量は大きくなってゆく．化石燃料の使用量は，直接的には電力需要の関数であるが，電力需要は気温の関数であるから，結局のところ，化石燃料の使用量も気温の関数と見なせよう．実際，(C.5) と (C.4) を組み

合わせ，$f(y)$ の y に $y = g(x)$ を代入することで

$$
\begin{aligned}
z &= f(y)|_{y=g(x)} \\
&= f(g(x)) \\
&= 10 + (g(x))^{3/2} \\
&= \underbrace{10 + (1+2x)^{3/2}}_{=(f \circ g)(x)}
\end{aligned} \tag{C.6}
$$

を得る．この合成関数 $(f \circ g)(x)$ は，気温 x の変化が（電力需要の変化を経由して）最終的に化石燃料の消費量 z にどのような影響を及ぼすのかを表わしたものである．

C.3　合成関数の微分

2 つの関数 $g: X \to Y$ と $f: Y \to Z$ について，その合成関数 $f \circ g: X \to Z$ を考える．この時，合成関数 $(f \circ g)(x)$ の微分係数は，

$$
(f \circ g)'(x) = f'(y)|_{y=g(x)} g'(x) \tag{C.7}
$$

によって計算することができ，これを連鎖律と呼ぶ．連鎖律は

$$
\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \tag{C.8}
$$

のようにもかける．連鎖律の右辺の式は，$f(y)$ の導関数 $f'(y)$ を $y = g(x)$ で評価したものと，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ とを掛け合わせたものである．この式はやや冗長なので，

$$
f'(g(x))g'(x) \tag{C.9}
$$

のように簡略化して書くこともある．ただし，ここで $f'(g(x))$ はあくまで「関数 $f(y)$ を y について微分した後に $y = g(x)$ で評価したもの」を意味しており，「合成関数 $f(g(x))$ を x について微分したもの」ではないことに注意が必要である．(C.9) のような書き方は，(C.7) や (C.8) に比べて簡素な表現と言え，とくに数式が冗長になり過ぎることを避ける目的でしばしば用いられる．しかしながら，(C.7) や (C.8) の方が，その意味するところについて誤解を生じさせる可能性が少ないという意味で，より正確な書き方と言える．

　さて，連鎖律の公式に慣れてもらうために，上の例を再び取り上げよう．ここでわれわれが問題にしたいのは，気温が少しだけ上昇した時に，化石燃料の消費量がどれだけ変化するのかということである．化石燃料の消費量 z と気温 x との

関係は，(C.5) で与えられる f と (C.4) で与えられる g とを組み合わせて

$$z = (f \circ g)(x) \tag{C.10}$$

によって表現できるのであった．したがって，x の変化に対する z の反応を知るためには，合成関数 $(f \circ g)(x)$ の微分係数を求めればよい．$(f \circ g)(x)$ は，(C.6) により

$$(f \circ g)(x) = 10 + (1+2x)^{3/2} \tag{C.11}$$

であることが分かっている．ここで，和の公式や積の公式，べき関数の微分の公式などを組み合わせるだけでは，この $(f \circ g)(x)$ の微分係数を直接的に計算することができないことに注意する．一方，$g(x)$ と $f(y)$ は (C.4) と (C.5) とで与えられていたから，微分係数はそれぞれ

$$g'(x) = (1+2x)' = (1)' + (2x)' = 2, \tag{C.12}$$

$$f'(y) = (10 + y^{3/2})' = (10)' + (y^{3/2})' = \frac{3}{2}y^{1/2} \tag{C.13}$$

のように計算することが可能である．そこで，連鎖律を用いれば

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \frac{d}{dy}f(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{d}{dx}g(x) \\
&= \frac{d}{dy}\left\{10 + y^{3/2}\right\}\bigg|_{y=1+2x} \frac{d}{dx}\{1+2x\} \\
&= \left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)\bigg|_{y=1+2x} \times 2 \\
&= 3(1+2x)^{1/2}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

のように，合成関数 $(f \circ g)(x)$ の微分係数を求めることができる．

この例とは反対に，$(f \circ g)(x)$ の微分係数は容易に計算できるが，$g(x)$ あるいは $f(y)$ の微分係数は直接的に計算できない，ということもある．具体的には，$g(x)$ と $f(y)$ が，それぞれ

$$g(x) := b^x, \tag{C.15}$$

$$f(y) := \ln(y) \tag{C.16}$$

によって与えられている例を考えよう．ここで $b \in \mathbb{R}_{++}$ は正の実数（定数）である．既知の公式からは，$g(x) = b^x$ の微分係数を求めることはできないことに注意しておく．一方，対数関数の性質 (1.29) に注意すれば，合成関数 $f \circ g$ は

$$(f \circ g)(x) = \ln(b^x) = x\ln(b) \tag{C.17}$$

であるから，その微分係数は直ちに

$$(f \circ g)'(x) = (x \ln(b))' = \ln(b) \tag{C.18}$$

と分かる．ここで，連鎖律の公式によれば，合成関数の微分係数 $(f \circ g)'(x)$ は

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \frac{d}{dy} f(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{d}{dx} g(x) \\ &= \frac{d}{dy}\left\{\ln(y)\right\}\bigg|_{y=b^x} \frac{d}{dx}\left\{b^x\right\} \\ &= \frac{1}{y}\bigg|_{y=b^x} \frac{d}{dx}\left\{b^x\right\} \\ &= \frac{1}{b^x}\frac{d}{dx}\left\{b^x\right\} \end{aligned} \tag{C.19}$$

を満たすはずである．したがって，(C.18) と (C.19) とを組み合わせることで

$$\frac{1}{b^x}\frac{d}{dx}\left\{b^x\right\} = (f \circ g)'(x) = \ln(b) \tag{C.20}$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\left\{b^x\right\} = b^x \ln(b) \tag{C.21}$$

を得る．これにより，直接的には計算できなかった指数関数 $g(x) = b^x$ の微分係数が，(C.21) によって与えられることが分かる[17]．

C.4　多変数関数の合成関数

2 つの 1 変数関数 $g : X \to Y_1$，$h : X \to Y_2$，および 2 変数関数 $f : Y_1 \times Y_2 \to Z$ を考えよう．図 24 に示したように，g は X の要素 $x \in X$ を Y_1 の要素 $g(x) \in Y_1$ に結びつけるもの，h は X の要素 $x \in X$ を Y_2 の要素 $h(x) \in Y_2$ に結びつけるものである．一方，f は $Y_1 \times Y_2$ の要素 $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ を Z の要素 $f(y_1, y_2) \in Z$ に結びつけるものである．

ここで，$(g(x), h(x))$ は $Y_1 \times Y_2$ に含まれる要素であるから，f を使ってそれをさらに Z の要素に変換できることに注意する．つまり，$f(y_1, y_2)$ の (y_1, y_2) に $(g(x), h(x))$ を代入すれば Z の要素 $f(g(x), h(x))$ を得る．これは言い換えれば，2 つの 1 変数関数 g, h と 1 つの 2 変数関数 f とを組み合わせることで，X の要素 $x \in X$ を Z の要素 $f(g(x), h(x)) \in Z$ に結びつける関数を新たに定義できるとい

[17]ちなみに，$\ln(e) = 1$ の関係に注意して（図 1 を参照のこと），(C.21) で $b = e$ と置けば

$$\frac{d}{dx}\left\{e^x\right\} = e^x \ln(e) = e^x \tag{C.22}$$

となるから，e^x の微分の公式 (2.10) も自ずと導かれる．

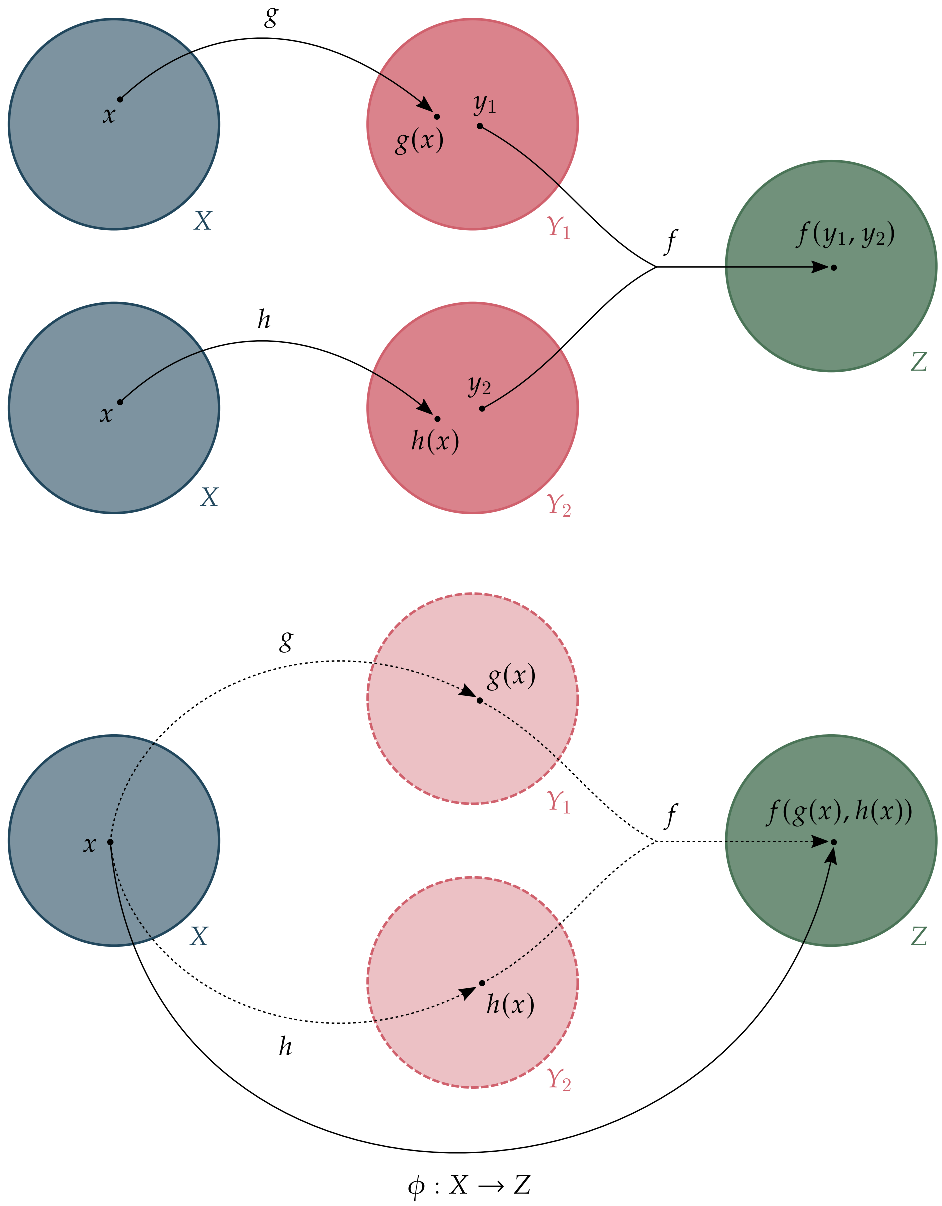

図 24: 多変数関数の合成関数

うことである．このようにして $x \in X$ を $f(g(x), h(x)) \in Z$ に結びつける関数を $\phi : X \to Z$ と書くことにしよう．すなわち

$$\phi(x) := f(g(x), h(x)) \quad \forall x \in X \tag{C.23}$$

である[18]．

[18] 多変数関数の合成関数については，1 変数関数の場合のように合成を表わす便利な記号（$\circ$）が決まっていないので，ここでは新たに関数を定義している．

具体的な例を挙げよう．$g(x)$ と $h(x)$ が

$$g(x) = 2x, \tag{C.24}$$

$$h(x) = (1+x)^2 \tag{C.25}$$

でそれぞれ定義されており，$f(y_1, y_2)$ が

$$f(y_1, y_2) = y_1^{1/2} y_2^{1/4} \tag{C.26}$$

で与えられているとしよう．これらの関数を合成すると，

$$\begin{aligned} f(g(x), h(x)) &= f(y_1, y_2)\big|_{y_1 = g(x), y_2 = h(x)} \\ &= \left(y_1^{1/2} y_2^{1/4} \right) \big|_{y_1 = g(x), y_2 = h(x)} \\ &= (g(x))^{1/2} (h(x))^{1/4} \\ &= \underbrace{(2x)^{1/2} (1+x)^{1/2}}_{=:\phi(x)} \end{aligned} \tag{C.27}$$

のような 1 変数関数 $\phi(x)$ を得る．別の例として，$g(x)$ と $h(x)$ がそれぞれ

$$g(x) = x, \tag{C.28}$$

$$h(x) = 10 - x \tag{C.29}$$

で定義されており，$f(y_1, y_2)$ が

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2 - \frac{1}{2} y_2^2 \tag{C.30}$$

で与えられている場合を考えてみる．これらの関数を合成すると，

$$\begin{aligned} f(g(x), h(x)) &= f(y_1, y_2)\big|_{y_1 = g(x), y_2 = h(x)} \\ &= \left(y_1 y_2 - \frac{1}{2} y_2^2 \right) \big|_{y_1 = g(x), y_2 = h(x)} \\ &= g(x)h(x) - \frac{1}{2}(h(x))^2 \\ &= x(10 - x) - \frac{1}{2}(10 - x)^2 \\ &= \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 20x - 50}_{=:\phi(x)} \end{aligned} \tag{C.31}$$

のように 1 変数関数 $\phi(x)$ を得ることができる．

無機質な意味のない例に思えるかもしれないが，例えば2つ目の例は独占企業の利潤を表現したものと解釈することができる．具体的には，x をある財の価格として，その財に対する需要量を y で表わす．また，需要量 y と価格 x との間に，

$$y = \underbrace{10 - x}_{=:h(x)}. \tag{C.32}$$

のような関係があるとしよう．価格を0にすると10単位の財を販売することができるが，価格を上昇させればその分だけ需要量は減少する．この企業の利潤 z は，財の価格 x と販売量 y の関数であり，

$$z = \underbrace{xy - \frac{1}{2}y^2}_{=:f(x,y)} \tag{C.33}$$

で与えられているとしよう．右辺の xy は売上（価格 x と販売量 y とを掛け合わせたもの）であり，$(1/2)y^2$ は財を y 単位生産するために必要な総費用である．

この企業の関心事は，利潤を最大にするような価格設定を行うことである．強気の価格設定では需要が減少し，財をあまり販売することができなくなる．需要は (C.32) に従うのだから，明らかに，価格を低く設定すればするほど需要は増加する．しかしながら，あまりに低い価格に設定すれば，需要自体は増加しても，利潤を減少させる可能性がある．したがって，価格が需要に及ぼす影響だけでなく，それが最終的な利潤にどのような影響を及ぼすのかを考える必要がある．この企業の利潤は直接的には価格と販売量の関数であるが，販売量も価格の関数であるから，つまるところ利潤は価格だけの関数になるはずである．実際，需要量と価格との関係を表わす (C.32) と，販売量と利潤との関係を表わす (C.33) とを組み合わせることで，

$$\begin{aligned} z &= f(x, h(x)) \\ &= xh(x) - \frac{1}{2}(h(x))^2 \\ &= x(10 - x) - \frac{1}{2}(10 - x)^2 \\ &= \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 20x - 50}_{=:\phi(x)} \end{aligned} \tag{C.34}$$

のように，利潤 z を価格 x の関数として表現することができる．この合成関数 $\phi(x)$ は，価格 x を変化させることで最終的な利潤 z がどのように影響を受けるのかを表わしたものである．したがって，$\phi(x)$ を最大するように価格 x を設定すれば，この企業の利潤 z を最も大きくすることができる．

C.5　多変数関数の合成関数の微分

2 つの 1 変数関数 $g : X \to Y_1$，$h : X \to Y_2$ と，1 つの 2 変数関数 $f : Y_1 \times Y_2 \to Z$ について，その合成関数を

$$\phi(x) := f(g(x), h(x)) \quad \forall x \in X \tag{C.35}$$

で表わそう．この時，$\phi(x)$ の微分係数は，

$$\phi'(x) = \left.\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1}\right|_{y_1=g(x), y_2=h(x)} g'(x) + \left.\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2}\right|_{y_1=g(x), y_2=h(x)} h'(x) \tag{C.36}$$

によって計算することができ，これを連鎖律と呼ぶ．右辺の第一項は，$f(y_1, y_2)$ の y_1 に関する偏導関数 $f_1(y_1, y_2)$ を $(y_1, y_2) = (g(x), h(x))$ で評価したものに，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を掛け合わせたものである．同様に第二項は，$f(y_1, y_2)$ の y_2 に関する偏導関数 $f_2(y_1, y_2)$ を $(y_1, y_2) = (g(x), h(x))$ で評価したものに，$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を掛け合わせたものである．本文の (3.41) でもそうしたように，連鎖律の右辺はたいへんに冗長なので，

$$f_1(g(x), h(x))g'(x) + f_2(g(x), h(x))h'(x) \tag{C.37}$$

のように簡略化して書くことも多い．

例を挙げよう，$g(x)$ と $h(x)$ が (C.24) と (C.25) とでそれぞれ与えられており，$f(y_1, y_2)$ が (C.26) で定義されている場合を考えよう．これらの関数を合成すると，(C.27) から

$$\phi(x) := f(g(x), h(x)) = (2x)^{1/2}\,(1+x)^{1/2} \tag{C.38}$$

のような 1 変数関数 $\phi(x)$ を得るのであった．この関数の微分係数は，連鎖律を用いると

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \left.\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1}\right|_{y_1=g(x), y_2=h(x)} g'(x) \\
&\quad + \left.\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2}\right|_{y_1=g(x), y_2=h(x)} h'(x) \\
&= \left.\left(\frac{1}{2} y_1^{-1/2} y_2^{1/4}\right)\right|_{y_1=2x, y_2=(1+x)^2} \frac{d}{dx}\{2x\} \\
&\quad + \left.\left(\frac{1}{4} y_1^{1/2} y_2^{-3/4}\right)\right|_{y_1=2x, y_2=(1+x)^2} \frac{d}{dx}\left\{(1+x)^2\right\} \\
&= (2x)^{-1/2}(1+x)^{1/2} + \frac{1}{2}(2x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{C.39}$$

のように計算できる．ちなみにこの例では，(C.38) の右辺に積の公式と 1 変数関

数の連鎖律の公式を用いることでも，$\phi'(x)$ を計算することが可能である．そのようにして求めた結果が (C.39) に一致することを確認するとよい．

最後に，上で挙げた独占企業の利潤最大化問題を考えよう．この企業の利潤 z と価格 x との関係は，$h(x)$ と $f(x,y)$ がそれぞれ (C.32) と (C.33) で与えられているものとして，

$$z = \phi(x) := f(x, h(x)) \tag{C.40}$$

のように表現できるのであった．利潤 z を最大化する x を見つけるためには，合成関数 $\phi(x)$ の傾きがゼロになる点を探せばよい．関数 $g(x)$ を便宜的に $g(x) := x$ で定義すれば，(C.40) の右辺は

$$\phi(x) := f(g(x), h(x)) \tag{C.41}$$

のように書けることに注意しよう．すると連鎖律を用いることにより，$\phi(x)$ の微分係数は

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=h(x)} g'(x) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=h(x)} h'(x) \\
&= (y)\Big|_{y=10-x} \frac{d}{dx}\{x\} + (x-y)\Big|_{y=10-x} \frac{d}{dx}\{10-x\} \\
&= 10 - x + (2x-10)(-1) \\
&= -3x + 20
\end{aligned} \tag{C.42}$$

のように計算できる[19]．したがって，価格 x を

$$x = \frac{20}{3} \tag{C.43}$$

のように設定すれば，この企業は利潤を最大化することができると分かる．

[19] この例についても，連鎖律の公式を用いずに，(C.34) を直接 x で微分した結果と一致することを確認されたい．